Escuela: CENS RODEO

Docente: Rolando Gastón Olarte

Año: TERCERO

Ciclo: Superior

Turno: VESPERTINO

Área Curricular: ESTADISTICA Y PROBABILIDAD

Título de la propuesta: TEORIA DE LA PROBABILIDAD

TEORIA GENERAL

TEMA INICIAL N°1:

1) DEFINICION

ESTA ES LA TEORIA COMPLETA Y LA EJERCITACION PARA ESTA SEMANA SE ENCUENTRA EN LAS FOTOCOPIAS ENTREGADAS CON ANTERIORIDAD

BIBLIOGRAFIA:

La vida está llena de incertidumbres. De hecho, casi todos los eventos que nos suceden llevan consigo algo de aleatoriedad. Por ejemplo, podemos decir que el ómnibus que nos lleva a la Facultad pasa regularmente a las 8.45 a.m.; pero, ¿podemos afirmar con toda certeza que mañana pasará exactamente a esa hora? El lector puede imaginar, sólo con un pequeño esfuerzo, ejemplos como el del párrafo anterior. Sobre la base de este (y de los que se le hayan ocurrido a usted), podemos realizar las primeras definiciones referidas a diversos fenómenos. – Un fenómeno se dice determinístico, si se sabe con toda certeza cuál será su comportamiento. – Un fenómeno es aleatorio, cuando no podemos afirmar con certeza cuál será su comportamiento. Ejemplo 1 Si lanzamos una piedra al aire, podemos afirmar con certeza que volverá a caer a la superficie de la tierra, pero no podemos saber con precisión el punto en el que caerá. Así, la caída es un fenómeno determinístico, mientras que el lugar en que se producirá dicha caída es aleatorio, ya que existe incertidumbre respecto del punto preciso en el que caerá. Ejemplo 2 Un seguro de vida paga un monto determinado en caso de muerte del asegurado. El pago del monto es un fenómeno determinístico, ya que sabemos que la muerte indefectiblemente sucederá. Sin embargo, el momento de pago es aleatorio, ya que no podemos precisar con exactitud la edad a la cual fallecerá cada asegurado. Como verá el lector, ejercitando un poco su imaginación, estamos rodeados de fenómenos aleatorios, y lidiamos a diario con los mismos casi sin notarlo. Pensemos, además, en la cantidad de afirmaciones que oímos a diario, casi sin darnos cuenta, relacionadas con la “probabilidad” de ocurrencia de determinados fenómenos. Por ejemplo, frecuentemente escuchamos en el noticiero que hay alta probabilidad de lluvias, o a un locutor decir que la probabilidad de que un equipo de fútbol revierta un resultado adverso es casi nula, o bien, que la probabilidad de ganar en un determinado juego es una en cien. Sin embargo, seguramente, pocas veces hemos reparado en pensar qué quiere decir exactamente un valor determinado de “probabilidad”. En este capítulo, lo que pretendemos es justamente precisar algunas definiciones de probabilidad. La Teoría de la Probabilidad es la encargada de estudiar los fenómenos aleatorios y, mediante ciertos axiomas que veremos más adelante, se define lo que llamaremos medida de probabilidad. A su vez, a partir de dichos axiomas se desprenden una serie de propiedades de la probabilidad muy útiles para su aplicación al análisis de fenómenos concretos. Así, mediante ciertos estudios probabilísticos se podrán realizar afirmaciones respecto de la probabilidad de que determinado artículo de una línea de producción sea defectuoso, la probabilidad de ganar cierto juego de azar o la probabilidad de que al extraer un individuo al azar del curso de estadística, el mismo sea un hombre y, además, sea fumador. En el presente capítulo se presentarán los conceptos básicos relacionados con la Teoría de la Probabilidad, la cual constituye una piedra angular de la Estadística. Pero antes de entrar de lleno en el tema que nos compete, expondremos un breve repaso de la Teoría de Conjuntos, la cual será una herramienta fundamental para los desarrollos posteriores.

1.2 Definición de Probabilidad En esta sección veremos que existen varias maneras de definir a la probabilidad, las cuales surgirán de acuerdo con el tipo de fenómeno que estemos analizando. A su vez, se observará que estas definiciones están estrechamente ligadas a las nociones intuitivas que se pueden llegar a tener respecto de la probabilidad. 1.2.1 Definición Clásica Si preguntamos a cualquier persona que nos diga cuál es la probabilidad de obtener ceca al lanzar una moneda al aire, casi con seguridad nos contestará “un 50%”. Asimismo, si consultamos cuál es la probabilidad de obtener el número 6 al lanzar un dado, es muy posible que la respuesta sea “un sexto”; mientras que si preguntamos cuál es la probabilidad de obtener un número par, la respuesta será “un 50%”. Estas respuestas intuitivas están ligadas a la definición clásica de probabilidad: Sea Ω un espacio muestral finito que contiene N eventos simples, y sea A un evento que puede darse de n maneras distintas; es decir, que al realizar un experimento hay N resultados posibles de los cuales n son favorables al evento A . La probabilidad de que ocurra el evento A está dada por: ( ) resultados favorables n P A resultados posibles N = = Si relacionamos la definición precedente con el repaso de la Teoría de Conjuntos, podemos afirmar que la probabilidad de que se dé el evento A está dada por el cociente entre la cantidad de elementos del conjunto favorables al evento A y el número de elementos del conjunto Ω , siendo estos últimos igualmente probables. Cabe aclarar que el evento A puede ser simple o compuesto, y en este segundo caso, puede resultar complicado determinar la cantidad de maneras en que puede darse el evento. A su vez, hay ocasiones en que resulta complicado determinar la cantidad de elementos que posee el espacio muestral Ω . Para ambos casos, resultan útiles las reglas de conteo (combinatoria, variaciones, etc.) que serán vistas en la sección 6 de este capítulo.

Ejemplo 9 Un individuo está por jugar a un juego en el que se lanzan dos dados equilibrados; gana $ 1 si el resultado de la suma de los números obtenidos en ambos dados es siete. La cantidad de resultados posibles cuando se lanzan dos dados es 36 (estos resultados son igualmente probables): si el resultado del primer dado es 1, el segundo puede arrojar cualquiera de los números del 1 al 6, con lo cual ya tenemos seis resultados posibles; si el primer dado es 2, el segundo nuevamente podrá arrojar cualquier valor del 1 al 6, con lo cual ya sumamos doce resultados; y así sucesivamente hasta completar 2 6 36 = resultados posibles. Luego, deberíamos determinar la cantidad de resultados favorables al evento “la suma de los dados es 7”: éste puede darse de seis maneras distintas (1 y 6, 2 y 5, 3 y 4, 4 y 3, 5 y 2, 6 y 1). En la siguiente tabla, se resumen todos los resultados posibles, y aparecen sombreados los resultados favorables al evento: 15

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
Dado 1	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

Así, la probabilidad de que el apostador gane, está dada por el cociente entre el número de resultados favorables al suceso y el número de resultados posibles:

$$P(A)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}=0,1667$$

<u>Definición Frecuentista</u> La Definición Frecuentista de probabilidad surge debido a la existencia de fenómenos aleatorios en los cuales no se puede determinar con precisión la probabilidad clásica de cada evento simple, es decir, que no podemos precisar cuántos resultados favorables a un evento existen y/o cuántos resultados posibles hay.

Consideremos algunos ejemplos en los cuales no se puede determinar con precisión los casos favorables y los casos posibles: un jefe de control de calidad desea determinar la probabilidad de que un artículo sea defectuoso, un fanático está interesado en la probabilidad de que su equipo de fútbol gane o un profesor que quiere saber la probabilidad de que sus alumnos aprueben.

Para estimar la probabilidad de cada uno de esos eventos, se recurre a la segunda manera de definir a la probabilidad, utilizando la frecuencia relativa de ocurrencia de los mismos.

Sea K el número de veces que se observa un fenómeno determinado, y sea k el número de veces en que ocurre un resultado favorable al evento A . La probabilidad de ocurrencia del evento A es la frecuencia relativa observada cuando el número total de observaciones crece indefinidamente:

$$P(A) = \lim_{K \to \infty} \frac{k}{K}$$

La gran mayoría de los fenómenos aleatorios con que nos enfrentaremos en la práctica son de este tipo, por lo cual esta definición de probabilidad será muy utilizada a lo largo de la presente obra.

Ejemplo 10 Consideremos un control de calidad de una empresa, en el cual se desea saber la probabilidad de que un determinado artefacto tenga una vida útil superior a las 1200 hs. Para ello, el departamento de control de calidad separa 500 unidades de la producción y mide la vida útil de cada unidad. Los resultados se observan en la siguiente tabla:

Duración (en hs.)	frec. abs.	frec. rel
menos de 800	10	2%
800 a 899	40	8%
900 a 999	55	11%
1000 a 1099	70	14%
1100 a 1199	85	17%
1200 a 1299	115	23%
1300 a 1399	84	17%
1400 o más	41	8%
	500	100%

Así, de acuerdo a la Definición Frecuentista (y considerando que 500 es un número suficientemente grande), la probabilidad de que la vida útil sea mayor o igual a 1200 hs. es:

$$P(A)=\frac{115+84+41}{500}=0,23+0,17+0,08=0,38$$

Esta definición de probabilidad da lugar a las pruebas de hipótesis, que serán tratadas en el Capítulo 7. Consideremos el lanzamiento de un dado y supongamos que queremos detectar si el mismo está cargado. Para ello, podríamos lanzar el dado un gran número de veces y observar la frecuencia relativa de ocurrencia de cada resultado; por ejemplo, si lanzamos el dado 600 veces, deberíamos esperar que 100 veces se dé cada uno de los resultados posibles. Sin embargo, difícilmente esto ocurra, y supongamos que el resultado 2 se dio 140 veces. Lo que se pretende al realizar un test de hipótesis, es probar si la evidencia empírica es suficiente como 16 para afirmar que el dado está efectivamente cargado a favor del número 2, o si la observación de una cantidad elevada de dicho resultado se debió simplemente al azar propio del experimento. Continuaremos con este tema en el capítulo correspondiente. 1.2.3 Definición Subjetiva La Definición Subjetiva de probabilidad está relacionada con el grado de creencia que tiene quien lleva a cabo un experimento respecto de la probabilidad de ocurrencia del mismo. Así, por ejemplo, al lanzar un nuevo producto al mercado, un gerente de ventas puede creer que el mismo tendrá un 70% de aceptación en el público, es decir, que la probabilidad (subjetiva) de que un individuo acepte el producto es de 0,7. Esta probabilidad suele llamarse también probabilidad a priori, ya que refleja el grado de creencia antes de que se realice cualquier prueba empírica. Las probabilidades a priori suelen modificarse luego mediante algún tipo de experimento como, por ejemplo, una encuesta para ver la aceptación que podría tener el producto. Una vez que el experimento se realiza, se modifican las probabilidades a priori para obtener las probabilidades a posteriori, las cuales serán utilizadas para tomar decisiones. Este tipo de análisis de problemas es lo que se conoce como Análisis Bayesiano, mediante el cual se modifican las probabilidades subjetivas (a priori) utilizando el Teorema de Bayes, el cual será expuesto más adelante. La tarea consiste en analizar la información suministrada por los resultados de algún tipo de experimento (por ejemplo, como dijimos anteriormente, una encuesta), para obtener probabilidades condicionadas a dicha información. Este tipo de análisis está íntimamente relacionado con la dependencia estadística de ciertos fenómenos, el cálculo de probabilidades condicionales y el Teorema de Bayes, temas desarrollados más adelante en el presente Capítulo. Cabe destacar que el Análisis Bayesiano tiene una amplitud mucho mayor que la mencionada. Sin embargo en esta obra no se tratarán con profundidad problemas de este tipo. Antes de iniciar el estudio de probabilidades condicionales y de fenómenos estadísticamente independientes, desarrollaremos los axiomas principales que debe cumplir cualquier medida de probabilidad.