

Escuela Agrotécnica Ejército argentino

Docente: Arias Cintia - TEL: 2644425733

Director: Carlos Mercado

Año, Ciclo y/o Nivel: 6º año 2º división – ciclo
orientado de la educación secundaria

Turno: mañana

Área Curricular: Matemática III

Título de la propuesta: Límites - Indeterminaciones

CARTA A LA COMUNIDAD EDUCATIVA DE SAN JUAN

Querida Comunidad Educativa, hoy la población sanjuanina, como la del mundo entero, está transitando una situación compleja y desconocida, totalmente impensada, provocada por la denominada *pandemia de Coronavirus COVID-19*. Situación que ha generado cambios abruptos y profundos en el desarrollo de nuestras vidas.

El aislamiento social y obligatorio, modificó no sólo nuestras conductas y actividades sociales, sino también produjo la pérdida de espacios personales, entre otros hechos, que nos inspiró de algún modo, a reactivar y poner en marcha comportamientos positivos, apelando a la creatividad y originalidad para la reorganización más saludable posible de las rutinas diarias.

En este sentido, *se produjo también un sensible e importante cambio en la educación de nuestros hijos*, quienes a partir de un Decreto Nacional que dispone la suspensión de las clases en todo el país, nuestro hogar, el espacio de convivencia natural de las familias, pasa a ser el escenario principal, esencial de la continuidad de las trayectorias educativas de niños/as, adolescentes, jóvenes y adultos.

Esto implicó e implica un desafío para el Ministerio de Educación y para la comunidad educativa sanjuanina toda, quienes pusimos en práctica por primera vez y de modo muy acelerado, un modelo de acompañamiento pedagógico, impregnado de herramientas tecnológicas, tal vez impensadas para muchos adultos que se desempeñan en el ámbito educativo y para muchos padres, que hasta ahora tenían un rol diferente en el proceso educativo de sus hijos.

En tan sólo horas fuimos capaces, Supervisores, Directores, Docentes y Familias, de poner en marcha la implementación del sitio ***Nuestra Aula en Línea***, activando todos los recursos del Estado para hacer llegar al hogar de cada uno de los estudiantes, guías pedagógicas con aproximaciones pedagógicas, diseñada por docentes y supervisadas por Directivos y Supervisores. Estas guías se distribuyeron en formato digital para aquellos que tienen acceso a la conectividad, y en formato papel, para aquellos que les resulta más complejo acceder a la plataforma virtual.

En este escenario, y tomando el pulso a las necesidades de la comunidad, propusimos implementar otro espacio denominado ***Nos Cuidemos Entre Todos***, el cual ofrece recursos de

orientación, asesoramiento y contención emocional a las familias, sobre cómo organizarse en casa, pautas de organización familiar para la tarea escolar de los estudiantes, protocolos y otros recursos de utilidad para esta etapa del aislamiento social.

Posteriormente se sumaron los espacios ofrecidos por *“Infinito por Descubrir”*, lo *“Nuevo de San Juan y Yo”*, *“Matemática para Primaria”*, *“Fundación Bataller”* con sus aportes de *Historia y Geografía*, y todos los recursos educativos que se suman día a día en nuestra jurisdicción.

Conscientes de esta nueva etapa del aislamiento social por la que transitamos todos, el Ministerio de Educación pone a disposición de Supervisores, Directores, Docentes, Padres y Estudiantes, los siguientes contactos, para todo tipo de consultas e inquietudes personales, de índole psicológico, psicopedagógico, social, académico, lúdico o abierto a cualquier situación compleja que lo amerite, como así también sobre dudas o dificultades sobre *guías pedagógicas*.

Consultas: educacionsanjuanteguiayorienta@gmail.com / 4305840 - 4305706

POR TODO LO TRANSITADO Y LO QUE QUEDA POR RECORRER, POR LOS ESFUERZOS, POR LA COLABORACION Y EL ACOMPAÑAMIENTO PERMANENTE, LES AGRADECEMOS INFINITAMENTE.

Educación te sigue acompañando.

Límites y operaciones

Estudiar el límite de una función en un punto es ver "a que tiende" esa función en ese punto "x". Notación $\Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b}$ límite cuando x tiende a ∞ de f(x) es igual a b.

Los valores de x pueden ser finitos o infinitos. Los que toma la función también.

Para calcular un límite debemos sustituir el valor de x por el valor que me diga el límite.

Podemos obtener solución o una indeterminación que hay que resolver.

Operaciones de números (los representamos por k) y $\pm \infty$. Regla de los signos.

Comparar un número (por muy grande o muy pequeño que sea) con el $+\infty$ o el $-\infty$, es como comparar una gota de agua (el número) con el mar (el infinito).

Se supone que el infinito es lo más grande o lo más pequeño que hay pero nunca podemos alcanzarlo. En realidad el infinito se ha establecido para poder poner fin.

Suma y resta $\Rightarrow k \pm \infty = \pm \infty$

$$a) 8 + \infty = \infty \quad b) -20 - \infty = -\infty \quad c) 8 - (+\infty) = 8 - \infty = -\infty \quad d) -\infty + 5 = -\infty \quad e) \infty - 10^6 = \infty$$

Producto $\Rightarrow k (\neq 0) \cdot \pm \infty = \pm \infty$

$$a) 5 \cdot \infty = \infty \quad b) -3 \cdot (-\infty) = \infty \quad c) 1000 \cdot \infty = \infty \quad d) -\infty \cdot (-8) = \infty \quad e) \infty \cdot (-5) = -\infty$$

Cociente $\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pm \infty}{k} = \pm \infty \\ \frac{k}{\infty} = 0 \end{cases}$

$$a) \frac{\infty}{5} = \infty \quad b) \frac{\infty}{-10} = -\infty \quad c) \frac{-\infty}{5000} = -\infty \quad d) \frac{-\infty}{-0,0001} = \infty$$

$$a) \frac{10^6}{\infty} = 0 \quad b) \frac{-0,00005}{-\infty} = 0 \quad c) \frac{10^6}{-\infty} = 0$$

Potencia $\Rightarrow \begin{cases} (\pm \infty)^k \Rightarrow a) (\pm \infty)^2 = \infty \quad b) \infty^3 = \infty \quad c) (-\infty)^3 = -\infty \\ k(\pm \infty) \Rightarrow \begin{cases} k > 1 \Rightarrow a) 2^\infty = \infty \quad b) \boxed{2^{-\infty} = \frac{1}{2^{+\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0} \\ 0 < k < 1 \quad a) \boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^\infty = \frac{1}{2^\infty} = \frac{1}{\infty} = 0} \quad b) \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = 2^\infty = \infty \end{cases} \end{cases}$

Tipos de indeterminaciones teniendo en cuenta a que tiende x

Límite cuando x tiende a $\pm \infty$. Posibilidades :

a) Obtenemos solución directamente.

 b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

 c) Indeterminación $\infty - \infty$

 d) Indeterminación 1^∞
Límite de una función en un punto. Posibilidades :

a) Obtener solución directamente.

 b) Obtener la indeterminación $\frac{0}{0}$. Tipos $\Rightarrow \begin{cases} \text{Con polinomios: factorizamos y simplificamos.} \\ \text{Con raíces: utilizamos el conjugado.} \end{cases}$

 c) Indeterminación $\frac{k}{0}$ Límites laterales, solución $\pm \infty$. Asíntotas verticales.

d) Funciones definidas "a trozos" . Límites laterales finitos. Lo vemos en continuidad.

Límites cuando $x \rightarrow \pm \infty$
a) Límites que nos dan solución directa.

Nos quedamos con el término de mayor grado.

Debemos poner el límite hasta que obtengamos el resultado final.

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 3x + 5 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 + 3x + 5 = \lim_{x \rightarrow \infty} -x^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} -(\infty)^2 = \lim_{x \rightarrow \infty} -(\infty) = -\infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} x - 3x^4 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} x - 3x^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3x^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3(\infty)^4 = \lim_{x \rightarrow \infty} -3 \cdot \infty = -\infty$$

b) Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{P(x)}{Q(x)} \Rightarrow \begin{cases} \text{Sustituimos } x \text{ por } \infty \text{ para ver que indeterminación es.} \\ \text{Nos quedamos con los términos de mayor grado.} \\ \text{Al resolver nos pueden aparecer 3 casos.} \end{cases}$

Casos
1. Cuando el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, nos da $+\infty$ o $-\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} \Rightarrow \begin{cases} 1^\circ & \text{Debemos comprobar el tipo de indeterminación} \\ 2^\circ & \text{Resolvemos} \end{cases}$$

$$1^\circ \text{ Sustituimos } x \text{ por } \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \frac{\infty}{\infty} \text{ INDETERMINACIÓN}$$

$$2^\circ \text{ Resolvemos} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x - 5}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 3x = +\infty$$

2. Cuando son del mismo grado. La solución es el cociente de los coeficientes del mismo grado.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Resolvemos} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2 - 2x + 5}{4x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3x^2}{4x^2} = -\frac{3}{4}$$

3. Cuando el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

La solución es cero.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \quad \text{Resolvemos} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^3 - 4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \frac{1}{\infty} = 0$$

- c) **Indeterminación $\infty - \infty$**

Se resuelve multiplicando y dividiendo por el conjugado de la raíz. Utilizamos la igualdad notable

suma por diferencia para conseguir quitar la raíz. $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - x$$

1º Sustituimos x por ∞ y nos da la indeterminación $\infty - \infty$.

2º Resolvemos: nos dan $(a - b)$ $\sqrt{x+1} - x$ el conjugado será $(a + b)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x+1} - x = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1} - x)(\sqrt{x+1} + x)}{\sqrt{x+1} + x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - (x)^2}{\sqrt{x+1} + x} =$$

Límite de una función en un punto

Posibilidades

a) Obtener solución directamente.

b) Obtener la indeterminación $\frac{0}{0}$. Tipos $\Rightarrow \begin{cases} \text{Con polinomios: factorizamos y simplificamos.} \\ \text{Con raíces: utilizamos el conjugado.} \end{cases}$

c) Indeterminación $\frac{k}{0}$ Límites laterales, solución $\pm \infty$. **Asíntotas verticales.**

d) Funciones definidas "a trozos". Límites laterales finitos. Lo vemos en continuidad.

a) **Obtener solución directamente.**

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 2^2 = 4$$

b) Indeterminación $\frac{0}{0}$

Funciones racionales con polinomios: descomponemos en factores y simplificamos.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - 6x + 12}{x^2 + 3x - 10} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 - 6)}{(x-2)(x+5)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 6}{x+5} = \frac{-2}{7}$$

Funciones racionales con raíces: multiplicamos y dividimos por el conjugado de la raíz.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x^2 + 5} - 3}{x^2 - 2x} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{x^2 + 5} - 3)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{(x^2 - 2x)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)(x-2)}{x(x-2)(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x+2)}{x(\sqrt{x^2 + 5} + 3)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

Ejercicios de límites resueltos

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 + 7x \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 + 7x = \lim_{x \rightarrow \infty} 5x^3 = \lim_{x \rightarrow \infty} 5 \cdot \infty = \infty$$

$$2. \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{\infty} = 0$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 5}{-x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{-1} = -\infty$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 - 2}{\sqrt{x} - 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 \text{ grado } 3}{\sqrt{x} \text{ grado } 1/2} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x}{4x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{4x^2} = \frac{1}{4}$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt{x-2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x - 6}}{x^3 - 4x + 2} \Rightarrow \dots \frac{\infty}{\infty} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5 + 2x - 6}}{x^3 - 4x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^5} \text{ grado } 5/2}{x^3 \text{ grado } 3} = 0$$

Actividades

1. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x^3 + 2x^2 - 3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 3x + 1}{x^2 + 2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 4x^2 + 5x - 2}{x^3 - x^2 - x + 1}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^4}{x^6 - x^2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-x} - \sqrt{2+x}}{x^2 + x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 2}{\sqrt{x + 2} - 2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2}{x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{2 - \sqrt{8-x}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x-1} - 1}{\sqrt{x+2} - 2}$$

2. Calcula los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x^3 - 1} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x - 2} - \frac{2 + 2x - x^2}{x^2 - 2x} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x^2 - 4} \right)^{\frac{1}{x+2}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3 - x}{2 + x} \right)^x$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + 3x)^{\frac{2}{x}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^2 + x + 1}{2 + x} \right)^{\frac{1}{x-1}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x + x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3x + 5)(5x + 2)}{-(x - 3)^2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(x^2 - \frac{x^4 + 1}{x^2 - 1} \right)$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9} - 3}{\sqrt{x^2 + 4} - 2}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 2} - \sqrt{x^2 - x})$$

$$l) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 - 1}} \right)^{\frac{2x+3}{x-2}}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 2} \right)^{\frac{x^2 + 1}{x}}$$