

13/11	Última fecha de presentación de la Guías 1 a 12
20/11	Inicio presentación Guía N°13 (Guía obligatoria)
27/11	Último plazo presentación Guía 13 (Obligatoria)
28/11	A partir del día 28/11 a las 0:00hs. finaliza indefectiblemente recepción de la guía 13

Escuela Técnica Obrero Argentino

Guía N°13

Docentes: Correa Claudia Noelia y Rolando Rodríguez

Sexto Año

1° Y 2° División

Ciclo: Orientado

Turno: Mañana y Tarde

Área Curricular: MATEMÁTICA

Educación Secundaria Técnica y Formación Profesional

TÍTULO: Límite. Continuidad y Derivada

GUÍA INTEGRADA

FORMA DE TRABAJO

Toda la guía se resuelve en el cuaderno y se copian los resultados en el Práctico del final y se envía a: *6^{to} 2^{da}: CLAUDIACORREA2439@gmail.com y *6^{to} 1^{era}: consultastrabajopracticos@gmail.com

Actividad N°1 A) Representar gráficamente:

$$h(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x + 1 & \text{si } 0 < x \leq 2 \\ (x - 2)^2 + 3 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

B) Analizar y completar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots$$

entonces: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \dots$

Actividad N°2 Determinar los siguientes límites, siempre que existan:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 - 3x + 1}{x^5 - 4x^3 + x} \right) =$ Mirar los siguientes videos:

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1} =$ <https://youtu.be/3HLgqNXFTLE> <https://youtu.be/lUnTEQwdVro>

Actividad N°3 Dada la ecuación: $f(x) = x^2 + 1$. Calcular

$f(-3) =$	$f(-4) =$
-----------	-----------

Los valores exactos son:

Por ejemplo para calcular **f(-2)** lo que hago es:

Primero) reemplazo el -2 en el lugar de x, esto es:

$$f(x) = x^2 + 1. \quad f(-2) = (-2)^2 + 1 \quad \text{Segundo) Resuelvo: } f(-2) = 4 + 1 = 5$$

Continuidad

Una función es continua en un punto si se cumplen las tres condiciones siguientes:

- 1- El punto pertenece al dominio de la función, es decir, la función está definida en él. Es decir: **Existe $f(a)$**
- 2- Tiene límite finito en ese punto. Es decir: **existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$**
- 3- El valor que determina la función en ese punto, es igual al límite de la función cuando x tiende al punto. Es decir: **$f(a) = L$**

Por ejemplo: Decimos que la función $f(x) = x^2 - x + 1$ es continua en $x=1$ pues:

Por lo tanto se verifican las tres condiciones, lo que indica que la función $f(x)$ es continua en $x=1$

1^{ero}) Existe $f(1) = 1^2 - 1 + 1 = 1$ entonces existe $f(1)$ y es = 1

2^{do}) Existe $\lim_{x \rightarrow 1} x^2 - x + 1 = 1^2 - 1 + 1 = 1$ por lo tanto existe $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ y es $L = 1$

3^{ero}) $f(1) = L = 1$

Recordemos: Una función puede ser continua o discontinua evitable (en cuyo caso se redefine) o discontinua inevitable (en cuyo caso el salto puede ser finito o infinito) y no se puede redefinir.

La función es discontinua evitable por lo que se puede redefinir:

Por ejemplo: 1) La función $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ es discontinua evitable

Pues: 1^{ero}) No existe $f(2)$ pues: $\frac{2^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$

2^{do}) Existe $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0}$ salvamos la indeterminación

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2) \cdot (x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} x + 2 = 2 + 2 = 4$$

3^{ero}) No se verifica la tercer condición pues no existe $f(2)$

$$\text{Redefinición: } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{si } x \neq 2 \\ 4 & \text{si } x = 2 \end{cases}$$

Actividad N°4 Determinar si las siguientes funciones son continuas o discontinuas en $x=2$, si es discontinua evitable redefinir:

a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$

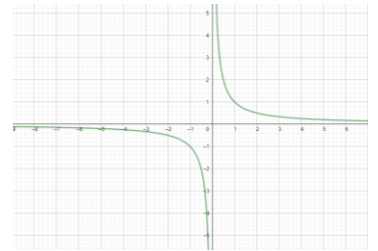
Por ejemplo 2): la función $f(x) = 1/x$ es discontinua inevitable en el punto $x=0$ y tiene un salto infinito pues:

1^{ero}) No existe $f(0)$ pues: $= \frac{1}{0} = \infty$

2^{do}) No existe $\lim_{x \rightarrow 0} = \frac{1}{0} = \infty$

Por lo que la tercer condición

tampoco se cumple. Por lo tanto $f(x)$ no es continua en el punto $x=0$ es discontinua inevitable y su salto es infinito



Ejemplo 3: (Salto finito)

Dada la función definida a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq 2 \\ -x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Cuya representación gráfica es:

Analicemos si es continua en el punto $x=2$

1^{ero}) Veamos si existe $f(2)$ = para ello vemos si la

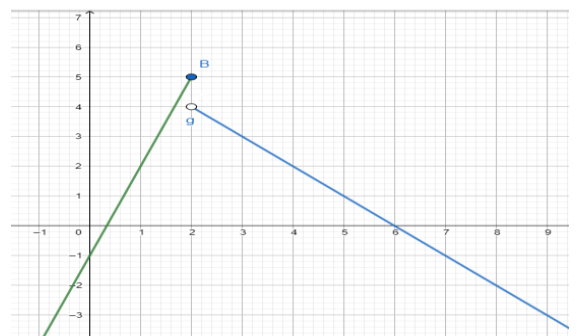
función está definida en $x=2$ (en la función definida a trozos es: $3x - 1$ entonces $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$

2^{do}) Veamos si existe $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ como es definida a trozos evaluamos el límite por izquierda

y por derecha; es decir: $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 4$ entonces no existe límite de $x \rightarrow 2$ de $f(x)$ pues $4 \neq 5$

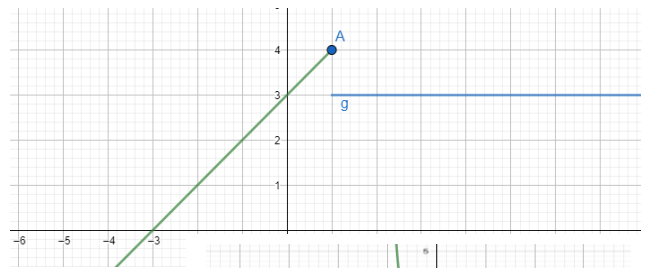
Por lo tanto, la función es discontinua inevitable y no se puede redefinir.



Actividad N°5

Determina cuales de las siguientes funciones **discontinuas inevitables tienen un salto finito o infinito (realiza este ejercicio analizando los tres pasos de la continuidad)**

a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 1 \\ 1x + 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$



b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$ analiza el salto: si

es finito o infinito en la discontinuidad del punto $x = -1$

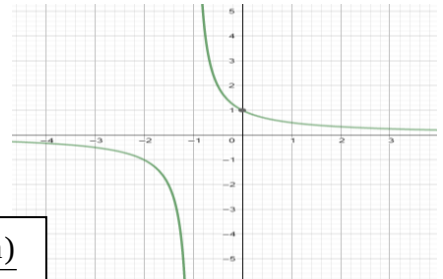
Su gráfica es:

Actividad N°6

Recordemos:

$$\text{TVM } [a, b] = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Dada la función: $f(x) = 2x^2 + 3$



Por ejemplo: $\text{TVM } [2, 3] = \frac{f(3) - f(2)}{3 - 2} =$

$$= \frac{(2 \cdot 3 + 3) - (2 \cdot 2 + 3)}{3 - 2} = \frac{9 - 7}{1} = \frac{2}{1} = 2$$

Calcular la TVM en el intervalo $[-2; 0]$

Derivada. Derivada por definición:

Si x es un punto cualquiera de (b, c) y h es un incremento positivo negativo suficientemente pequeño de manera tal que $x + h$ pertenezca al intervalo (b, c) , llamamos derivada de f a:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1) \quad \text{Mirar el video: } \a0R0iohHRRE$$

Observación: Observamos que, si f tiene derivada en cada punto x , es decir que si el límite existe se obtiene a partir de f una nueva función que hace corresponder a cada valor de x la derivada de $f(x)$. Esta función así definida se designa por : $f'(x)$

Por ejemplo: Obtener la derivada de la función: $f(x) = x^2$

Mirar: <https://youtu.be/uLDg8fqsuZg>

Por la definición: $f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1)$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x$$

Si $f(x) = x^2$ entonces: $f'(x) = 2x$

Actividad N° 7 Determinar la derivada por definición de la función: $f(x) = 3x^2 - 4x$

Y completar con ella $f'(x) = \dots\dots\dots$

Derivada de una función: Reglas de derivación

Regla N°1: Si la función es una función constante su derivada es 0

Mirar: <https://youtu.be/T42-57sojsA>

$$f(x) = c \quad f'(x) = 0$$

Ejemplo: $f(x) = 4$ entonces $f'(x) = 0$

Regla N°2: Si la función es una función polinómica su derivada es: "Bajo el exponente y lo multiplico por la base; la base queda elevada al exponente original de la función restado 1"

Mirar: <https://youtu.be/VDumjbBAstg>

$$f(x) = x^n \quad n \neq -1 \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

Ejemplo: $f(x) = x^4$ entonces $f'(x) = 4 x^{4-1} = 4 \cdot x^3$

Regla N°3: Si la función es una función polinómica su derivada es bajo el exponente por la base como está elevada a la resta del exponente menos 1

Ejemplo: $f(x) = x^{0,4}$ entonces $f'(x) = 0,4 x^{0,4-1} = 0,4 \cdot x^{-0,6}$

Recordamos: ¿Para qué sirven las derivadas? Simple para entender su utilización

<https://youtu.be/AzTGmJGIpI8>

Regla N°4: Si la función es la función $y = x$ su derivada es: $y' = 1$

Regla N°5: Si la función es la función $y = \sin x$ su derivada es $y' = \cos x$

Regla N°6: Si la función es la función $y = \cos x$ su derivada es $y' = -\sin x$

Regla N°7: Si la función es la función $y = \ln x$ su derivada es $y' = \frac{1}{x}$

Regla N°8: Si la función es la función $y = \log x$ su derivada es $y' = \frac{1}{x} \cdot \log e$

Regla N°9: Si la función es la función $y = a^x$ (una función exponencial)

Su derivada es: $y' = a^x \cdot \ln(a) \cdot 1$ **Mirar:** <https://youtu.be/bEmCMdwXy5o>

Regla N°10: Si la función es la función $y = e^x$ (una función exponencial; con base "e")

Su derivada es: $y' = e^x$ esta es la única función cuya derivada es ella misma.

Propiedades de Derivación

Derivada del producto de una constante por una función

https://youtu.be/_63Vv6qyjM

Ejemplo: Si $f(x) = 3 \cdot 4^x$ entonces $f'(x) = 3 \cdot 4^x \ln(4) \cdot 1$

Derivada de la suma de dos funciones y de la resta de dos funciones

<https://youtu.be/RBN1HeRmZlc>

Ejemplo: Si $f(x) = x^2 \pm \sin(x)$ entonces: $f'(x) = 2 \cdot x \pm \cos(x)$

Actividad N°8 Derivar y completar con su derivada en el siguiente práctico

Práctico para completar de la Guía N°13 Apellido: _____ Nombre: _____ 6^{to}

Actividad N°1

Actividad N°2

Analizar y completar:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \dots\dots\dots \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \dots\dots\dots \text{ entonces: } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

Determinar los siguientes límites, siempre que existan y completar:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5 - 3x + 1}{x^5 - 4x^3 + x} \right) =$	
b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 4x + 3}{x^2 - 1} =$	

Actividad N°3 Dada la ecuación: $f(x) = x^2 + 1$. Calcular: $f(-3) = \dots\dots\dots$ $f(-4) = \dots\dots\dots$

Actividad N°4 Determinar si las siguientes funciones son continuas o discontinuas en $x=2$, si es discontinua evitable redefinir:

Función	Analizar su continuidad	Escribir, si existe su redefinición
a) $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$		
b) $f(x) = x^2 - 4x + 4$		

Actividad N°5 Determina cuales de las siguientes funciones discontinuas inevitables tienen un salto finito o infinito

Función	Determinar el tipo de salto: finito o infinito
a) $f(x) = \begin{cases} 3 & \text{si } x > 1 \\ 1x + 3 & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$	
b) $f(x) = \frac{1}{x+1}$	

Actividad N°6 Calcular la TVM en el intervalo $[-2;0]$ Dada la función: $f(x) = 2x^2 + 3$

Actividad N° 7 Determinar la derivada por definición de la función: $f(x) = 3x^2 - 4x$

Actividad N° 8 Deriva y completa con su función derivada:

$f(x)$	$f'(x)$
a) $f(x) = \frac{e^x}{8} - 2 \cdot x^{1/2}$	
b) $f(x) = \frac{\frac{4}{3} \cdot \sqrt[5]{x^3} + \left(\frac{1}{2}\right)^x}{-4}$	
c) $f(x) = \text{sen } x - \frac{5}{4} \cdot \cos x$	

Director: Jorge Grosso