Escuela Agrotécnica Ejército argentino

Docente: Arias Cintia

Año, Ciclo y/o Nivel: 6º año 2º división – ciclo orientado de la educación secundaria

Turno: mañana

Área Curricular: Matemática II

Título de la propuesta: Funciones

Funciones reales

Concepto de función

Una función es una **correspondencia** entre dos conjuntos numéricos, de tal forma que a cada elemento del conjunto inicial le corresponde un elemento y sólo uno del conjunto final. Se relacionan así dos variables numéricas que suelen designarse con x e y.

f: x → y=f(x)

- x es la variable independiente
- y es la variable dependiente

El grafico describe el recorrido de la 9ª Etapa de la Vuelta Ciclista 2007, indicando los km totales y la altitud en los puntos principales del trayecto.
A la izquierda aparece la gráfica anterior trazada sobre unos ejes cartesianos, para simplificarla se han unido los puntos principales mediante segmentos. Se trata de una función que da la altitud según los km recorridos, observa la tabla de valores.

km	0	24	34	71	87	113	121	153	160	168
alt	540	1280	740	1290	630	1020	720	1130	1520	1882

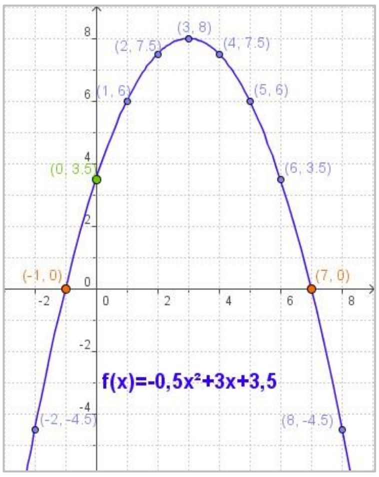
Gráfica de una función

Para ver el comportamiento de una función, **f: x → y**, recurrimos a su **representación gráfica** sobre los ejes cartesianos, en el eje de abscisas (OX) la variable independiente y en el de ordenadas (OY) la independiente; siendo las coordenadas de cada punto de la gráfica: **(x, f(x))**.
En la figura está representada la función:

$$f(x)= 0,5x^2+3x+3,5$$

Haciendo una tabla de valores, se representan los puntos obtenidos, x en el eje de abscisas (OX), f(x) en el de ordenadas (OY).

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(x)	-4,5	0	3,5	6	7,5	8	7,5	6	3,5	0	-4,5



Hay unos puntos que tienen especial interés, los que la gráfica corta a los ejes coordenados. Para calcularlos:

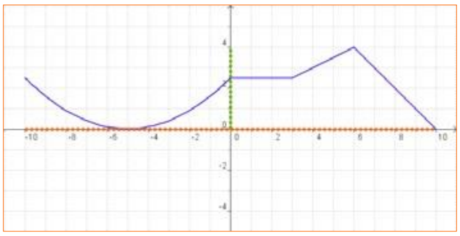
- ✓ Corte con el eje OY: Los puntos del eje de ordenadas tienen abscisa 0, basta hacer **x=0** en la fórmula de la función.
- ✓ Cortes con el eje OX: Los puntos del eje de abscisas tienen y=0. Se resuelve la ecuación **f(x)=0**

Cortes con los ejes

EJE OY: f(0)=3,5 Punto (0, 3,5)
EJE OX: Resolviendo la ecuación:
Resulta: $0,5x^2+3x+3,5=0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9+7}}{-2 \cdot 0,5} = 3 \pm 4 = \begin{matrix} 7 \\ -1 \end{matrix}$$

Puntos (7, 0) (-1, 0)



Dominio y recorrido

Dada una función y=f(x)

- Se llama **dominio** de f al conjunto de valores que toma la variable independiente, **x**. Se indica como **Dom f**. El dominio está formado, por tanto, por los valores de x para los que existe la función, es decir, para los que hay un f(x).
- La imagen es el conjunto que puede tomar la variable dependiente Y , se representa como Im f(x)

Calcular Dominios

- Si la expresión analítica de la función es un polinomio, el dominio son todos los números reales.

$f(x)=-x^4+4x^2+1$

Dom f = $\mathbb{R}$

Im f = $(-\infty , 5]$

- Si la expresión analítica de la función es un cociente, el dominio son todos los reales excepto los que anulan el denominador.

$f(x) = \dfrac{2}{x-1}$

Dom f = $\mathbb{R}$ - {1}

Im f = $(-\infty , 0) \cup (0, +\infty)$

- Si la expresión analítica de la función es una raíz cuadrada, el dominio está formado por los números reales para los que el radicando es positivo o cero.

$f(x) = \sqrt{x+3}$

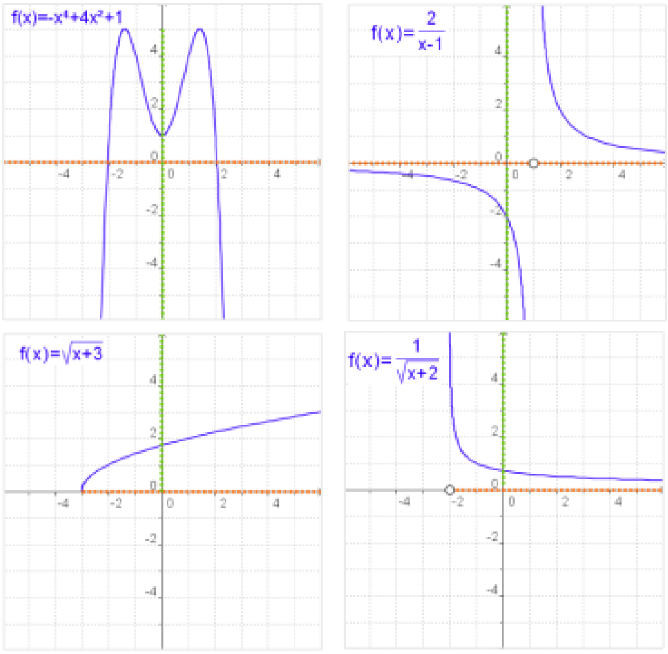
Dom f = $[-3,+\infty)$

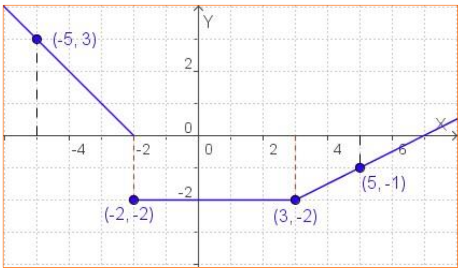
Im f = $[0,+\infty)$

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}}$

Dom f = $(-2,+\infty)$

Im f = $(0,+\infty)$





$$f(x) = \begin{cases} -x-2 & x < -2 \\ -2 & -2 \le x \le 3 \\ 0{,}5x - 3{,}5 & x > 3 \end{cases}$$

Funciones definidas a trozos

Hay un tipo de funciones que vienen definidas con distintas expresiones algebraicas según los valores de x, se dice que están **definidas a trozos**.

Para describir analíticamente una función formada por trozos de otras funciones, se dan las expresiones de los distintos tramos, por orden de izquierda a derecha, indicando en cada tramo los valores de x para los que la función está definida. En la figura puedes ver un ejemplo de este tipo de funciones y su representación gráfica.

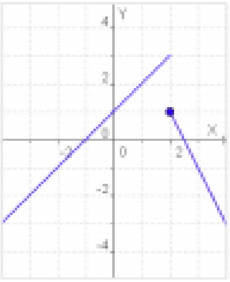
2. Propiedades de las funciones

Continuidad

La primera idea de función **continua** es la que puede ser representada de un solo trazo, sin levantar el lápiz del papel.

Cuando una función no es continua en un punto se dice que presenta una **discontinuidad**.

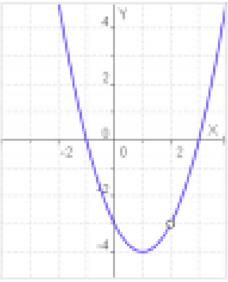
Las tres funciones dibujadas debajo son discontinuas en x=2, pero tienen distintos tipos de discontinuidad.



$f(x)=\begin{cases} x+1 & x<2 \\ -2x+5 & x\geq 2 \end{cases}$

f(2)=1

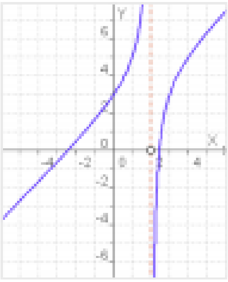
La gráfica presenta un salto.



$f(x)=\dfrac{x^3-2x^2+x+6}{x-2}$

x=2 no pertenece al dominio.

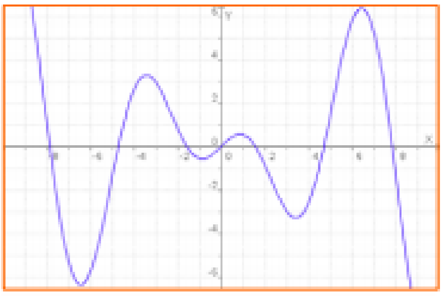
Esta discontinuidad se dice "evitable".



$f(x)=\dfrac{x^2-6}{x-2}$

x=2 no pertenece al dominio.

La gráfica presenta un salto infinito.



Una función y=f(x) es continua en x=a si:

- La función está definida en **x=a**, existe **f(a)=b**.
- Las imágenes de los valores próximos a **a** tienden a **b**.

Hay varias razones por las que una función no es continua en un punto:

- Presenta un salto.
- La función no está definida en ese punto, o si lo está queda separado, hay un "agujero" en la gráfica.
- La función no está definida y su valor crece (o decrece) indefinidamente cuando nos acercamos al punto.

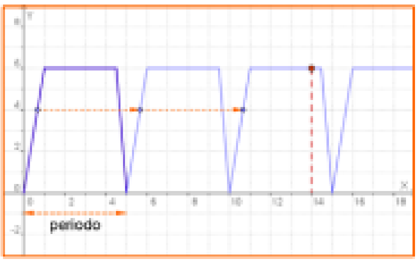
Funciones periódicas

En la naturaleza y en tu entorno habitual hay fenómenos que se repiten a intervalos regulares, como el caso de las mareas, los péndulos y resortes, el sonido...

Las funciones que describen este tipo de fenómenos se dicen **periódicas**

Una **función** es **periódica** cuando su valor se repite cada vez que la variable independiente recorre un cierto intervalo. El valor de este intervalo se llama **periodo**.

f(x+periodo)=f(x)



Una cisterna se llena y vacía automáticamente expulsando 6 litros de agua cada 5 minutos, siguiendo el ritmo de la gráfica. Cuando el depósito está vacío comienza el llenado, que cuesta 1 minuto, permanece lleno 3,5 minutos y se vacía en 0,5 minutos. Este proceso se repite periódicamente.

Para conocer el volumen de agua en el depósito en cada instante conocer lo que ocurre en estos primeros 5 minutos. Así a los 14 minutos, la cantidad de agua es:

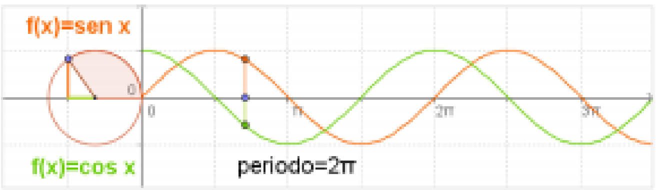
f(14)=f(4+2·5)=f(4)=6

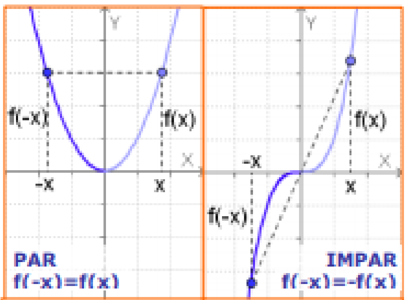
Al dividir 14:5, cociente=2 resto=5

En general, si el periodo es 5:

f(x+5·n)=f(x)

Dos funciones periódicas importantes:





Cuando se dobla la gráfica por el eje de ordenadas las dos ramas coinciden.	Cuando se dobla la gráfica por ambos ejes las dos ramas coinciden.

Simetrías

La gráfica de algunas funciones puede presentar algún tipo de simetría que si se estudia previamente, facilita su dibujo.

- ✓ Una función es **simétrica** respecto al **eje OY**, si **f(-x)=f(x)**.
  En este caso la función se dice **PAR**.
- ✓ Una función es **simétrica** respecto al **origen de coordenadas** cuando **f(-x)=-f(x)**.
  En este caso la función se dice **IMPAR**.

Observa los gráficos para reconocerlas.

Trabajo practico

1. Calcula la imagen de x=0 en la función:

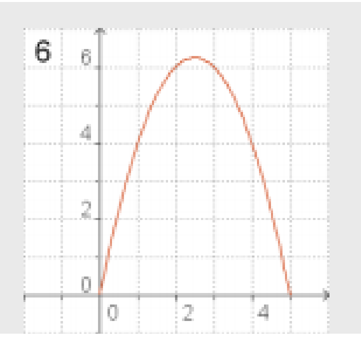
$$f(x) = \begin{cases} 2x-1 & x \le 3 \\ 5 & x > 3 \end{cases}$$

2. Calcula el dominio de la función:

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-4}$$

3. ¿Cuál de los puntos siguientes: (1,-2) (3,-15) (4,-26) no pertenece a la gráfica de la función $f(x)=-x^2-3x+2$?.

4. Calcula los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta y=-0,25x-0,75.



5. Si y=f(x) es una función impar y f(3)=-2, ¿cuánto vale f(-3)?

6. La gráfica muestra el primer tramo de una función periódica de periodo 5 y expresión $f(x)=-x^2+5x$ $(0 \le x < 5)$. Calcula f(28).

7. Averigua el valor de a para que la función sea continua en x=3.

$$f(x) = \begin{cases} 2x+k & x \le 3 \\ 6 & x > 3 \end{cases}$$