

FinEs 1: Deudores - Matemática

Escuela: Bachillerato José Manuel Estrada

Docente: Gremoliche Patricia

Área Curricular: Matemática Aplicada

Título de la propuesta: función exponencial, función logarítmica y propiedades de logaritmos.

1) FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Función exponencial

La función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$ tal que $a > 0$, $a \neq 1$

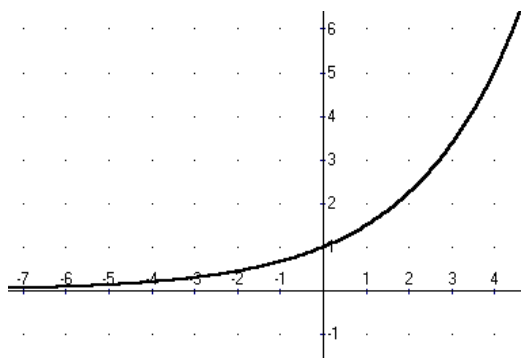
El valor a se llama base de la función exponencial.

Propiedades:

- El dominio es \mathbb{R} .
- El recorrido es $[0; +\infty]$
- La función es continua en \mathbb{R} .
- $f(0) = 1$

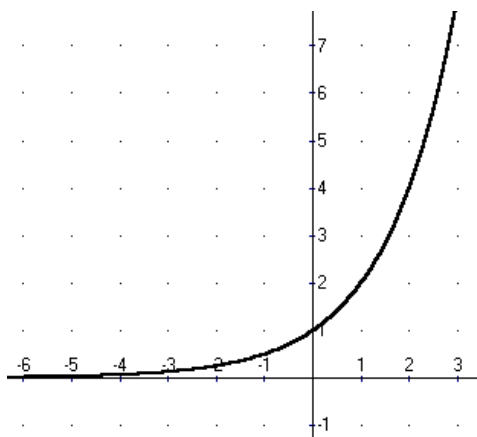
. La función representada es:

$$Y = (3/2)^x$$

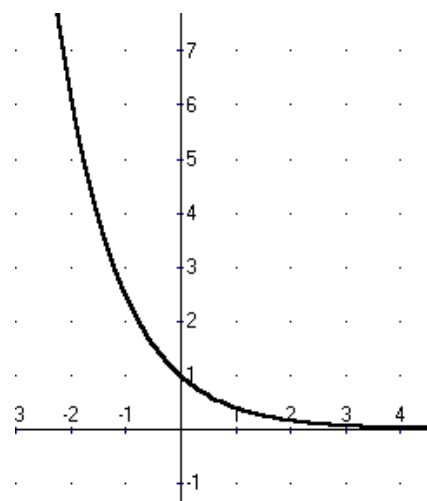


Si $a > 1$ la función es creciente

Si $0 < a < 1$ la función es decreciente



$$Y = 2^x$$



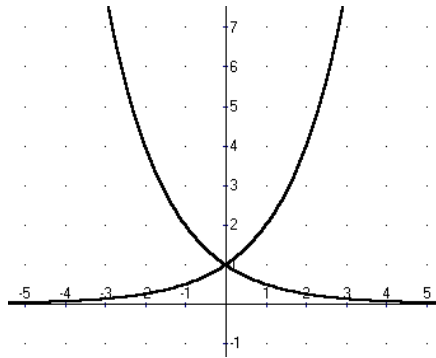
$$y = (2/5)^x$$

Las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$, $g(x) = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje de las ordenadas (eje Y).

$$Y = (1/2)^x$$

$$Y = 2^x$$

FinEs 1: Deudores - Matemática



Ejercicio 1:

Estudia y representa la función $f(x) = 4^x$.

Es una función exponencial de base $a = 4$

El dominio es \mathbb{R}

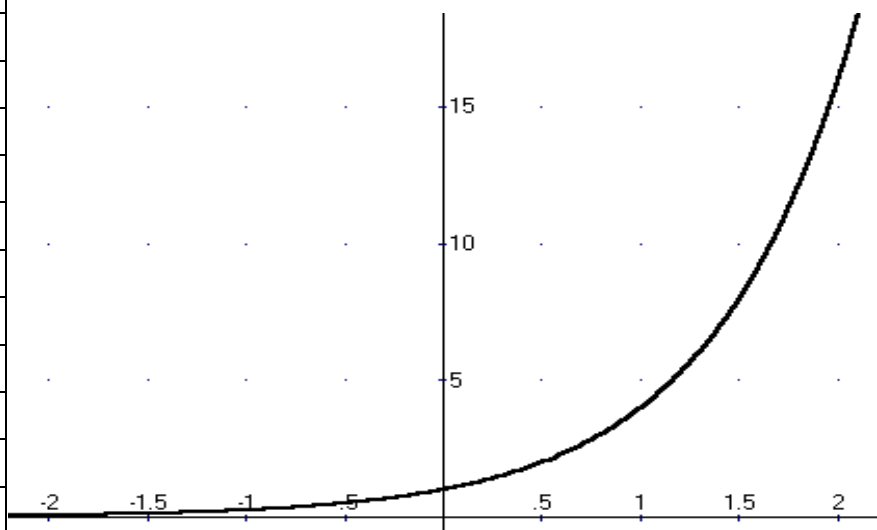
El recorrido es $[0, +\infty]$

Es una función creciente.

La función es continua en \mathbb{R}

Construimos una tabla de valores de la función:

X	Y = 4^X
-2,5	0,03
-2	0,06
-1,5	0,125
-1	0,25
-0,5	0,5
0	1
0,5	2
1	4
1,5	8
2	16
2,5	32



Función logarítmica

Sea $a > 0$, $a \neq 1$

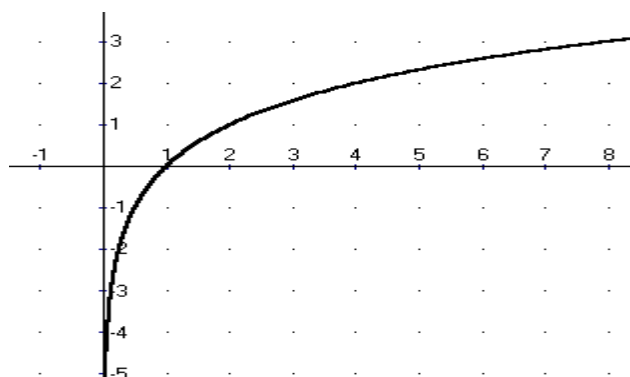
Definimos logaritmo de base a de x y lo representamos $\log_a x$ al valor y tal que:

$a^y = x$, es decir, la operación inversa de la exponencial.

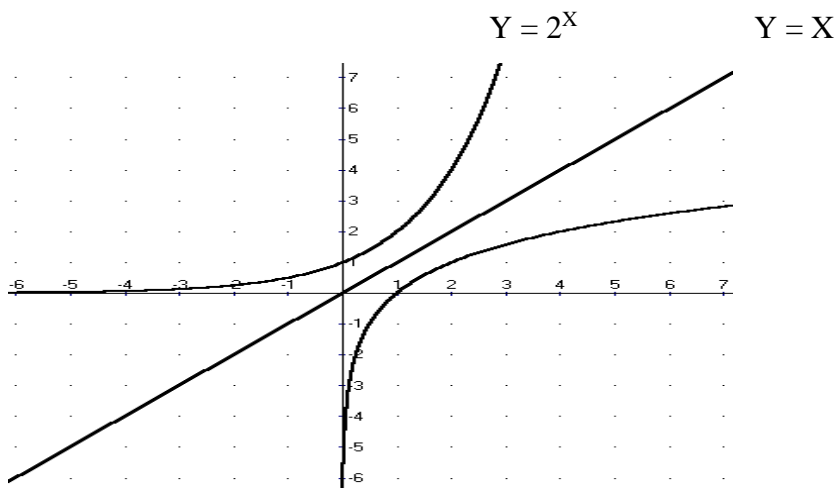
Propiedades del logaritmo y la función logarítmica

- El dominio de la función logarítmica es $[0, +\infty]$
- El recorrido de la función logarítmica es \mathbb{R} .
- La función es continua en $[0, +\infty]$
- Si $\log_a x = \log_a y$, entonces, $x = y$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a^p = p$
- La función $f(x) = \log_a x$, y la función $g(x) = a^x$

son inversas, por tanto son simétricas respecto de la recta $y = x$



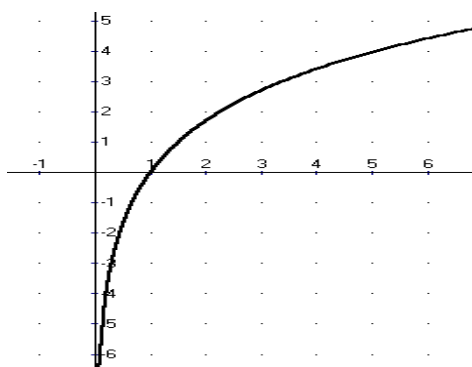
$y = \log_2 X$



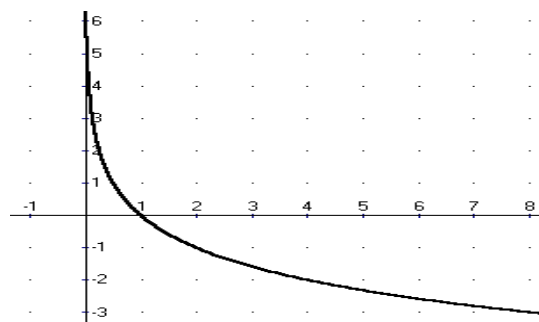
$y = \log_2 X$

Si $a > 1$ la función es creciente

Si $0 < a < 1$ la función es decreciente



$y = \log_{1,5} x$



$y = \log_{0,5} x$

2) PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Es necesario que recordemos la definición de logaritmo:

El logaritmo en base b de un número a se representa por $\log_b(a)$ y es el número c que cumple $b^c = a$:

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

- El número b es la **base** del logaritmo. Tiene que ser un real positivo distinto de 1.
- El número a es el **argumento** del logaritmo.
- El número c es el **logaritmo** en base b de a .

Si la base es 10, no es necesario escribir la base.

Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto de factores es la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\log_5(15) &= \log_5(5 \cdot 3) = \\ &= \log_5(5) + \log_5(3) = 1 + \log_5(3)\end{aligned}$$

Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned}\log_3\left(\frac{3}{5}\right) &= \log_3(3) - \log_3(5) = \\ &= 1 - \log_3(5)\end{aligned}$$

Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es el logaritmo de la base de la potencia multiplicado por el exponente:

$$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

Ejemplo:

FinEs 1: Deudores - Matemática

$$\begin{aligned}\log_2(8) &= \log_2(2^3) = \\ &= 3 \cdot \log_2(2) = 3 \cdot 1 = 3\end{aligned}$$

Importante:

Las bases de los logaritmos para aplicar las propiedades tienen que ser iguales.

Ejemplo:

Podemos sumar logaritmos con base común:

$$\log_2(5) + \log_2(3) = \log_2(15)$$

No podemos sumar logaritmos con base distinta:

$$\log_2(5) + \log_{10}(3) \neq \log_2(15)$$

3. Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1

$$\log(3) + \log(5)$$

Solución:

La suma de logaritmos es el logaritmo del producto:

$$\begin{aligned}\log(3) + \log(5) &= \\ &= \log(3 \cdot 5) = \\ &= \log(15)\end{aligned}$$

Ejemplo 2

$$3 \cdot \log(2)$$

Solución:

El número 3 pasa al argumento como un exponente:

$$\begin{aligned}3 \cdot \log(2) &= \\ &= \log(2^3) = \\ &= \log(8)\end{aligned}$$

Ejemplo 3

$$3 \cdot \log(2) + 2 \cdot \log(3)$$

Solución:

Antes de utilizar la propiedad de la suma de logaritmos, tenemos que introducir los coeficientes (3 y 2) como exponentes de los argumentos:

FinEs 1: Deudores - Matemática

$$\begin{aligned}3 \cdot \log(2) + 2 \cdot \log(3) &= \\&= \log(2^3) + \log(3^2) = \\&= \log(8) + \log(9) = \\&= \log(8 \cdot 9) = \log(72)\end{aligned}$$

Ejemplo 4

$$\frac{1}{2} \cdot \log(9)$$

Solución:

Recordad que el exponente $1/2$ es la raíz cuadrada:

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Por tanto, tenemos el logaritmo de una raíz cuadrada:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \cdot \log(9) &= \\&= \log\left(9^{\frac{1}{2}}\right) = \\&= \log(\sqrt{9}) = \log(3)\end{aligned}$$

Ejemplo 5

$$8 \log_5(\sqrt{5})$$

Solución:

En lugar de introducir el 8 como un exponente, vamos a extraer el exponente $1/2$ del argumento:

$$\begin{aligned}8 \log_5(\sqrt{5}) &= \\&= 8 \log_5(5^{\frac{1}{2}}) = \\&= 8 \cdot \frac{1}{2} \log_5(5) = \\&= 4 \log_5(5) = 4\end{aligned}$$