Escuela: CENS RODEO

Docente: Rolando Gastón Olarte

Año: TERCERO

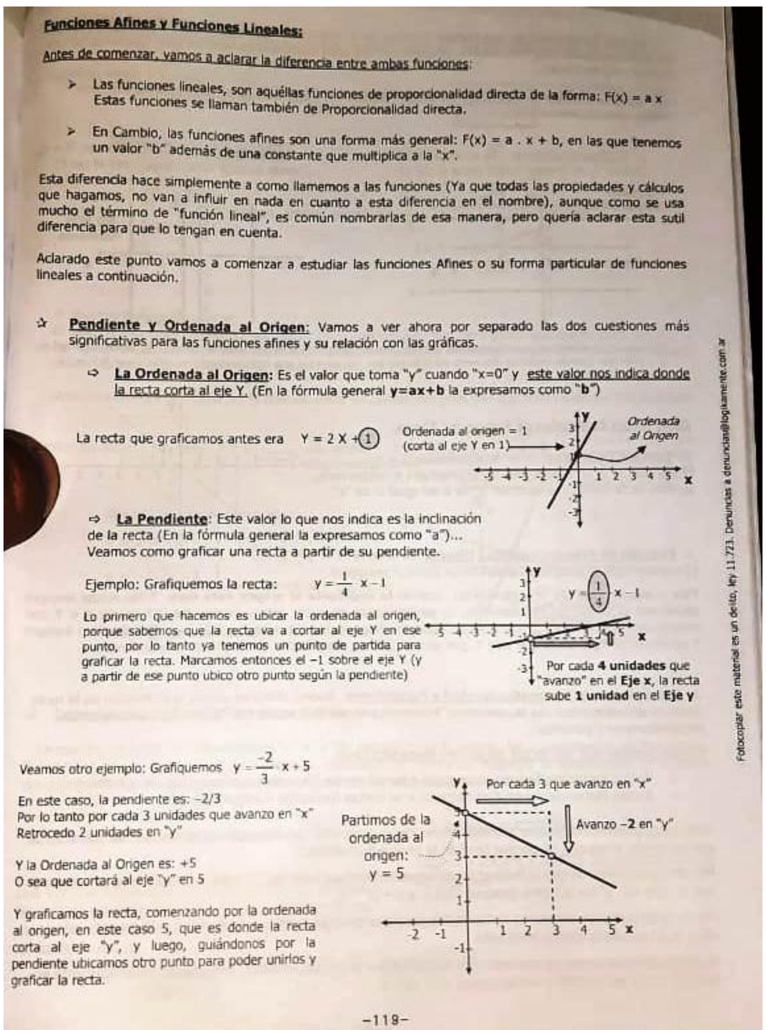
Ciclo: Superior

Turno: VESPERTINO

Área Curricular: Matemática

Título de la propuesta: SISTEMAS DE ECUACIONES

Guía n°7:



Funciones Afines y Funciones Lineales:

Antes de comenzar, vamos a aclarar la diferencia entre ambas funciones:

- Las funciones lineales, son aquéllas funciones de proporcionalidad directa de la forma: $F(x) = a\,x$
Estas funciones se llaman también de Proporcionalidad directa.

- En Cambio, las funciones afines son una forma más general: $F(x) = a \cdot x + b$, en las que tenemos un valor "b" además de una constante que multiplica a la "x".

Esta diferencia hace simplemente a como llamemos a las funciones (Ya que todas las propiedades y cálculos que hagamos, no van a influir en nada en cuanto a esta diferencia en el nombre), aunque como se usa mucho el término de "función lineal", es común nombrarlas de esa manera, pero quería aclarar esta sutil diferencia para que lo tengan en cuenta.

Aclarado este punto vamos a comenzar a estudiar las funciones Afines o su forma particular de funciones lineales a continuación.

☆ **Pendiente y Ordenada al Origen**: Vamos a ver ahora por separado las dos cuestiones más significativas para las funciones afines y su relación con las gráficas.

⇨ **La Ordenada al Origen**: Es el valor que toma "y" cuando "x=0" y este valor nos indica donde la recta corta al eje Y. (En la fórmula general **y=ax+b** la expresamos como "**b**")

La recta que graficamos antes era $Y = 2X + 1$

⇨ **La Pendiente**: Este valor lo que nos indica es la inclinación de la recta (En la fórmula general la expresamos como "a")...
Veamos como graficar una recta a partir de su pendiente.

Ejemplo: Grafiquemos la recta: $y = \frac{1}{4}x - 1$

Lo primero que hacemos es ubicar la ordenada al origen, porque sabemos que la recta va a cortar al eje Y en ese punto, por lo tanto ya tenemos un punto de partida para graficar la recta. Marcamos entonces el −1 sobre el eje Y (y a partir de ese punto ubico otro punto según la pendiente)

Veamos otro ejemplo: Grafiquemos $y = \frac{-2}{3}x + 5$

En este caso, la pendiente es: −2/3
Por lo tanto por cada 3 unidades que avanzo en "x"
Retrocedo 2 unidades en "y"

Y la Ordenada al Origen es: +5
O sea que cortará al eje "y" en 5

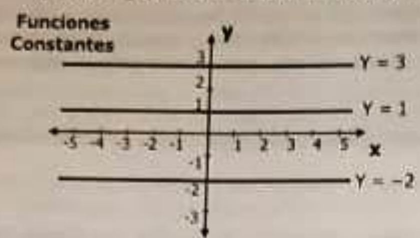
Y graficamos la recta, comenzando por la ordenada al origen, en este caso 5, que es donde la recta corta al eje "y", y luego, guiándonos por la pendiente ubicamos otro punto para poder unirlos y graficar la recta.

−119−

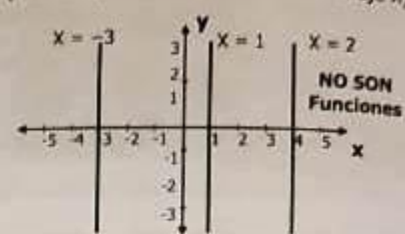
☆ **Rectas Verticales y Horizontales:** Vamos a ver a continuación dos casos muy particulares de rectas, las rectas verticales y las horizontales, ya que estos dos tipos especiales se escriben simbólicamente de una manera muy particular.

Lo interesante es saber cómo graficar en los ejes cartesianos estos tipos de rectas a primera vista solo mirando la expresión simbólica.

☆ Rectas Horizontales: La ecuación es: $Y = Y_1$
(Donde Y_1 es el valor donde corta al eje Y)



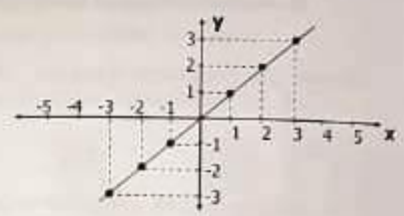
☆ Rectas Verticales: La ecuación es: $X = X_1$
(Donde X_1 es el valor donde corta al eje X)



Es importante saber que cuando tenemos una recta de la forma: Y = 5 es una recta horizontal que corta al eje "y" en 5, o bien que cuando tenemos una recta de la forma X = −6, va a ser una recta vertical que corte al eje "x" en −6

Otros Casos Especiales de Funciones Afines:

☆ **Función Identidad**: Es la recta particular Y = X
O sea cuando la pendiente vale 1 y la ordenada al origen cero.
En esta recta siempre el valor de "y" va a ser igual al de "x"



☆ **Función de Proporcionalidad Directa**: Es la recta Y = "a" . X + 0
(También llamada **Función Lineal** como vimos al principio)

Para cualquier valor de "a" (pendiente) cuando **la ordenada al origen vale cero**. Estas rectas siempre pasan por el origen de coordenadas. La particularidad de estas rectas es que los valores de X e Y son magnitudes directamente proporcionales. Ejemplo: Supongamos la recta Y = 3 X → En este caso siempre Y va a valer el triple de lo que vale X, por eso es que son magnitudes directamente proporcionales.

☆ **Condiciones de Perpendicularidad y Paralelismo**: Bueno, como ya vimos, la inclinación de la recta depende del valor que tome la pendiente "**a**", veamos ahora que ocurre con "**a**" en los casos de rectas perpendiculares y paralelas...

Primero veamos que son rectas paralelas y perpendiculares:

- Rectas Paralelas: Son rectas que no se cortan nunca (O se dice que se cortan en el infinito)
- Rectas Perpendiculares: Son rectas que se cortan formando 4 ángulos de 90º

Visto esto, podemos comenzar a imaginarnos que va a suceder con las rectas paralelas, en las que si no se cortan nunca, entonces, es porque tendrán la misma inclinación.

Por otro lado sabemos que la inclinación de las rectas respecto del eje "x" está definida por la pendiente o sea el valor de "a" en la forma general: F(x) = a x + b

Por lo tanto podemos concluir que dos rectas paralelas tendrán la misma inclinación, o lo que equivale a decir que tendrán la misma pendiente.

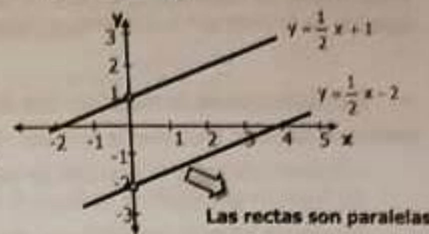
A continuación veremos los conceptos de paralelismo y perpendicularidad, expresados simbólicamente en función de las pendientes y con ejemplos ilustrativos.

⇨ **Rectas Paralelas**:
Como ya habíamos adelantado, para que dos rectas sean paralelas, **las pendientes deben ser iguales**.

Dadas las rectas $\begin{cases} Y_1 = a_1 \cdot X + b_1 \\ Y_2 = a_2 \cdot X + b_2 \end{cases}$ ⇨ Las rectas Y_1 e Y_2 son paralelas: ⟺ $\boxed{a_1 = a_2}$ "O sea que para que sean paralelas las pendientes tienen que ser iguales"

Veamos un ejemplo graficado:

$$\left.\begin{array}{l} y = \frac{1}{2}x - 2 \\ y = \frac{1}{2}x + 1 \end{array}\right\} \text{Tienen ambas pendiente} = \frac{1}{2}$$



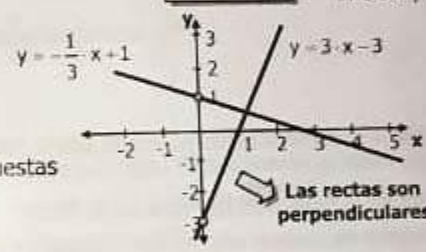
⇨ **Rectas Perpendiculares**:
El caso de las rectas perpendiculares es un poco mas difícil de ver, pero quiero que quede claro que no hay duda de que está condición dependerá de las pendientes de las rectas, ya que las mismas son las que definen la inclinación relativa de las rectas respecto del eje "X"

Veamos entonces cuál debe ser la relación entre las pendientes para que dos rectas sean perpendiculares:

Dadas las rectas $\begin{cases} Y_1 = a_1 \cdot X + b_1 \\ Y_2 = a_2 \cdot X + b_2 \end{cases}$ ⇨ Las rectas Y_1 e Y_2 son perpendiculares: ⟺ $\boxed{a_1 = -\frac{1}{a_2}}$ "O sea que para que sean perpendiculares las pendientes tienen que ser inversas y opuestas"

Veamos un ejemplo graficado:

$$\left.\begin{array}{l} y = 3 \cdot x - 3 \\ y = -\frac{1}{3} \cdot x + 1 \end{array}\right\} \begin{array}{l} 3 \quad y \quad -\frac{1}{3} \\ \text{Son inversas y opuestas} \end{array}$$



☆ **Intersección de Rectas**: Dos rectas distintas "no paralelas" se intersecan en un único punto.

La manera de hallar las coordenadas "x" e "y" de ese punto es igualando las ecuaciones de ambas rectas. Si tenemos ambas rectas en forma explícita, igualando "y" podemos despejar la coordenada "x" y luego reemplazando con el valor ya conocido de "x" una vez hallado, podemos calcular "y".

Ejemplo: calculemos donde se cortan: $\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -2x + 4 \end{cases}$ ⇨ Igualamos: ⇨ $x - 2 = -2x + 4$

⇨ $x + 2x = 4 + 2$ ⇨ $3x = 6$ ⇨ $\boxed{x = 2}$
Despejamos

Una vez que tenemos la cordenada "x" donde se cruzan las rectas, remplazamos ese valor en cualquiera de las ecuaciones de las restas y hallamos la coordenada "y" de donde se cruzan.

⇨ $y = x - 2$ ⇨ $y = 2 - 2$ ⇨ $\boxed{y = 0}$
Hallamos "y"

–121–

Construcción de la ecuación de una recta:

Hay dos maneras de definir una recta única:

- Dando dos puntos por donde pasa la recta
- Dando un punto por donde pasa y la pendiente de la recta

En función de los datos que tengamos en cada caso, vamos a aplicar dos métodos diferentes para saber la ecuación de la recta que nos definen por cualquiera de esas dos maneras.

☆ **Construcción de la ecuación una Recta conociendo un punto y la pendiente**

Veamos un ejemplo: Encontrar la ecuación de la recta que pasa por el punto **(1,0)** y tiene pendiente -2

La manera de hallar la ecuación de esta recta es la siguiente:
La ecuación general de la recta es Y = "a" . X + "b"
El valor de "a" es la pendiente que la tenemos como dato $\boxed{\mathbf{a = -2}}$

Lo que nos falta ahora es definir el valor de "b" o la ordenada al origen.
Para ello podemos seguir el siguiente método:

Partimos de la ecuación general de cualquier recta: Y = "a" . X + "b"
Reemplazamos "a" por (−2) con lo que nos queda la recta Y = −2X + "b"
Esto porque sabemos que -2 es el valor de la pendiente.

Reemplazamos la "X" y la "Y" por las coordenadas del punto que nos dieron y despejamos "b"
(a la "X" por la coordenada X y a la "Y" por la coordenada "Y")

$$Y = -2 \cdot X + b \Longrightarrow 0 = -2 \cdot 1 + b \Longrightarrow 0 = -2 \cdot 1 + b \Rightarrow \boxed{b = 2}$$

Por lo tanto la recta que nos pidieron es: $\boxed{Y = -2 \cdot X + 2}$

☆ **Construcción de la ecuación de una Recta conociendo dos puntos de ella:** Vamos a ver un ejemplo: Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos **(1,-2)** y **(2,3)**

Partimos de la Ecuación General de la Recta:

La manera de resolver esto es con sistemas de ecuaciones, así que repasen un poco antes de seguir con este tema.. bueno, decimos que vamos a usar un sistema de ecuaciones porque vamos a remplazar a la "X" y a la "Y" de la ecuación general de la recta por las coordenadas de los dos puntos, con lo cual nos van a quedar dos ecuaciones con dos incógnitas, las incógnitas de esas ecuaciones serán "a" y "b"

Reemplazamos por las coordenadas del punto (1;-2) $\Longrightarrow (1; -2) \quad y = a \cdot x + b \Rightarrow -2 = a \cdot 1 + b$

Reemplazamos por las coordenadas del punto (2;3) $\Longrightarrow (2; 3) \quad y = a \cdot x + b \Rightarrow 3 = a \cdot 2 + b$

Y ahora armo un sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas

Armamos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} -2 = \mathbf{a} . 1 + \mathbf{b} \\ 3 = \mathbf{a} . 2 + \mathbf{b} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -2 = \mathbf{a} + \mathbf{b} \\ 3 = 2 . \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{cases}$$

Ahora recurrimos a cualquiera de los 5 métodos para resolver Sistemas de Ecuaciones...
Nosotros usamos el Método de Sumas y Restas de ecuaciones..

-122-

Preparamos las ecuaciones para sumarlas o restarlas. En este caso vamos a restarlas.

$$
\begin{array}{rrcl}
 & -2 & = & a + b \\
- & 3 & = & 2a + b \\
\hline
 & -5 & = & -1a
\end{array}
\Longrightarrow \boxed{a = 5}
$$

Y como vemos, de una manera muy sencilla, ya tenemos el valor de "a" o la pendiente de la recta que buscábamos.

Ahora calculamos **b**. Reemplazamos "**a**" en la primera ecuación:

$$-2 = a + b \Longrightarrow -2 - 5 + b \Longrightarrow -2 - 5 = b \Longrightarrow \boxed{b = -7}$$

Y armamos la Ecuación de la Recta $\boxed{Y = 5 \cdot x - 7}$

☆ Ecuación Segmentaria de la Recta:

Hasta ahora vimos siempre las rectas escritas de la forma $F(x) = a \cdot x + b$
Pero existen muchas otras formas de escribir la ecuación de una recta.
Nosotros vamos a ver ahora una forma muy interesante que tendrá luego aplicaciones importantes.
La Forma de escribir las rectas que veremos será la "Forma Segmentaria"

La forma general de la ecuación segmentaria de una recta es: $\boxed{\dfrac{X}{A} + \dfrac{Y}{B} = 1}$

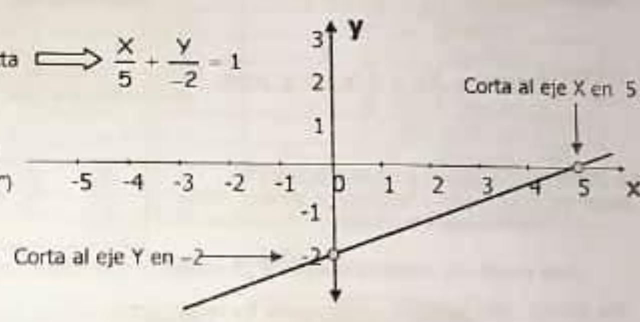
Donde "A" y "B" son los valores en que la recta corta al eje X y al eje Y respectivamente

Ejemplo: Grafiquemos la recta $\Longrightarrow \dfrac{X}{5} + \dfrac{Y}{-2} = 1$

En este Caso:

A = 5 (Corte en el eje "x")

B = −2 (Corte en el eje "y")



Nota: La ecuación Segmentaria de la recta es muy útil para graficarla rápidamente ya que lo único que hay que hacer es ubicar las intersecciones con los ejes y unir ambos puntos.

☆ Pasaje de La Ecuación Segmentaria a La Ecuación Explícita:

Muchas veces vamos a tener que usar la forma explícita y vamos a tener la forma segmentaria, por ello veremos ahora como hacer para expresar en forma explícita una recta expresada en forma segmentaria.

Para pasar algebraicamente de la ecuación segmentaria a la explícita debemos despejar "Y"

Ejemplo, vamos a pasar a forma explícita la recta $\dfrac{X}{5} + \dfrac{Y}{-2} = 1$

$$\frac{X}{5} + \frac{Y}{-2} = 1 \underset{\text{Pasamos restando el término de la "X" que estaba sumando}}{\Longrightarrow} \frac{Y}{-2} = -\frac{X}{5} + 1 \underset{\text{Pasamos multiplicando el }-2}{\Longrightarrow} Y = -2 \cdot \left(-\frac{X}{5} + 1\right) \underset{\text{distributiva del }-2}{\Longrightarrow} \boxed{Y = \frac{2}{5}X - 2}$$

-123-

Verdadero o Falso?.-

1) **$x = 3$** es una recta horizontal.-
2) La recta **$y = x$** corta al **Eje y** en **$y = 1$**.-
3) **$y = \frac{1}{2} x + 6$** pasa por el punto **(4, 8)**.-
4) Una recta puede tener más de una ordenada al origen.-
5) Las rectas **$y = x$** e **$y = -x$** son perpendiculares.-
6) Existen infinitas rectas que cortan al **Eje y** y a su vez no cortan al **Eje x**.-
7) Las rectas $y = 52/3\, x + 5$ e $Y = 52/3\, x - 30$ son paralelas.-
8) Las rectas $300/79\, x - 8$ y $-300/79\, x + 8$ son perpendiculares.-
9) Las rectas $Y = 5x + 8/3$ e $Y = -1/5x - 8/3$ cortan al **Eje y** en el mismo punto.-
10) Las rectas $Y = 5x + 8/3$ e $Y = 8/3$ cortan al **Eje y** en el mismo punto.-

Hallar la ecuación de la recta que pase por los puntos P_0 y P_1:

11) $P_0 = (-2; 4)$ y $P_1 = (-4; 5)$
12) $P_0 = (1; 3)$ y $P_1 = (2; 5)$
13) $P_0 = (-1; 2)$ y $P_1 = (-4; -1)$
14) $P_0 = (2; 4)$ y $P_1 = (-2; 2)$
15) $P_0 = (3; 2)$ y $P_1 = (2; 3)$
16) $P_0 = (-2; 1)$ y $P_1 = (-4; 5)$

Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto P_0 y sea paralela o perpendicular a la recta dada:

Ejercicio:	Punto P_0:	Recta:
17)	(2; -1)	$y = x - 3$ (Paralela)
18)	(-1; 1)	$y = x + 4$ (Paralela)
19)	(-4; 0)	$y = 1/2\, x - 5$ (Paralela)
20)	(0; 4)	$y = 3/4\, x + 1$ (Paralela)
21)	(1; 3)	$y = x - 5$ (Paralela)
22)	(-2; -3)	$y = -x - 3$ (Paralela)
23)	(0; 2)	$y = -2\, x + 1/4$ (Paralela)
24)	(1; 3)	$y = -x - 1/2$ (Paralela)
25)	(3; 1)	$y = -x$ (Perpendicular)
26)	(3; 2)	$y = -x + 1/2$ (Perpendicular)
27)	(6; 4)	$y = -2\, x$ (Perpendicular)
28)	(5; 6)	$y = -x + 13$ (Perpendicular)

Hallar la ecuación de la recta que pase por el punto P_0 y cuya ordenada al origen sea:

Ejercicio:	Punto P_0:	Ordenada al origen:
29)	(-4; -3)	−1/3
30)	(1; -2)	-7
31)	(6; 1)	-5
32)	(1; 4)	1
33)	(1; 0)	-1
34)	(-3; 5)	-1

Hallar las ecuaciones de las rectas que cortan a los ejes en los siguientes puntos:

Ejercicio:	Punto donde corta al Eje x	Punto donde corta al Eje y
35)	-2	1
36)	-1	3
37)	-3	-6
38)	2	-1
39)	2	-4
40)	6	-2

–125–