FINES II: TRAYECTO SECUNDARIO PARCIAL
Escuela: CENS 74
Docente: Facundo Montenegro
Área Curricular: Matemática
Título de la propuesta: Función lineal, resolución gráfica y algebraica de sistemas de ecuaciones lineales

Función Lineal

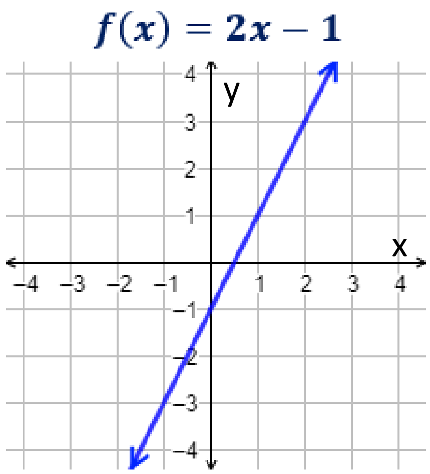
Una función lineal es una función polinómica de primer grado, cuya representación en el plano cartesiano es una **línea recta**. Es decir, tiene la siguiente forma:

$$y = ax + b$$

$\boldsymbol{a}$ es la **pendiente** de la función (también se lo puede encontrar como **m**)

$\boldsymbol{b}$ es la **ordenada al origen de la función**, (intercepción con el eje **y**).

Veamos un ejemplo:



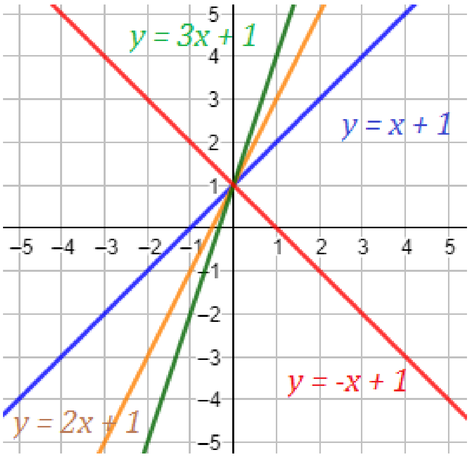
La pendiente de la función es $a = 2$ y la ordenada es $b = -1$.

La pendiente es el coeficiente de la variable, el número que está multiplicando a **x** en este caso, es decir $\boldsymbol{a}$.

Geométricamente, cuanto mayor es la **pendiente** (a), más inclinada es la recta. Es decir, más rápido crece la función.

- Si la pendiente es positiva, la función es creciente.
- Si la pendiente es negativa, la función es decreciente.

Ejemplo: rectas con pendientes 1, 2, 3 y -1



Observe que la recta con pendiente negativa -1 es **decreciente** (la roja). Las otras tres rectas son **crecientes**.

De las rectas crecientes, la que crece más rápidamente es la verde (pendiente 3), sería la que está más inclinada hacia arriba.

Se puede decir también que la función que tiene pendiente más alta (pendiente 3) crece más rápido que las funciones con pendientes más bajas (1 y 2).

Acá les dejo unos video con dos maneras de graficar las funciones lineales.

https://www.youtube.com/watch?v=AoZpzAoC1Qg&t=335s

https://www.youtube.com/watch?v=PzpCT9CDqRw&t=23s

Sistemas de ecuaciones lineales (resolución grafica)

Hemos visto que las ecuaciones lineales de dos incógnitas nos permiten describir las situaciones planteadas en distintos problemas. Hemos observado que cada una de ellas admite infinidad de soluciones y hemos encontrado la recta que representa a todas las soluciones de una ecuación lineal.

Ahora vamos a ver el caso cuando más de una ecuación representa las condiciones del problema ya que es muy necesario plantear más de una sola ecuación en muchísimos casos de problemas reales.

Se dice que las ecuaciones que expresan las condiciones de un problema forman un **sistema de ecuaciones**.

Ahora veremos cómo resolver gráficamente un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Ejemplo:

La suma de dos números es 12 y su diferencia es 6, ¿Cuáles son esos números?

Con esto nos piden que encontremos dos números que cumplan esas condiciones, que sumados den 12 y que si los restamos de 6.

Si llamamos **x** a uno de los números e **y** al otro, podemos expresarlo como las ecuaciones:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

A expresiones como la anterior se le denomina **sistema de ecuaciones lineales**.

Una forma de encontrar la solución de este problema podría ser buscar pares de valores que cumplan con las dos condiciones (ecuaciones), por ejemplo que su suma sea 12, y después ver cuál de ellos cumple con la segunda. Hacemos una tabla como la siguiente

x	y	x + y	x - y
7	5	12	2
8	4	12	4
8.5	3.5	12	5
9	3	12	6
10	2	12	8
11	1	12	10
12	0	12	12
13	-1	12	14

Al llenar la tabla como valores de **x** e **y** que pensamos que pueden cumplir la condición, vemos que el par de valores **x** = 9, **y** = 3 es la solución del problema ya que **9 + 3 = 12** y **9 - 3 = 6** entonces estos números cumplen con las dos condiciones que se plantearon.

Podríamos preguntarnos si es el único par de valores que cumple con ambas condiciones, pero es imposible pensar en “probar” todos los números cuya suma sea 12, porque como ya vimos, son infinitas los pares de valores que cumplen una condición.

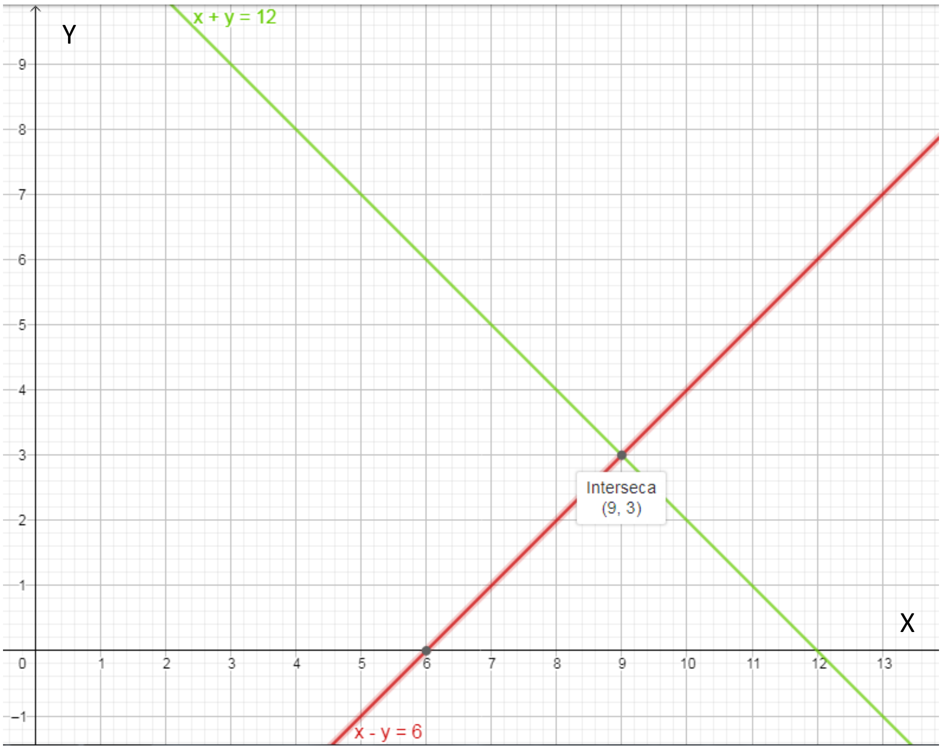
Una manera apropiada de resolver el problema es por la **resolución grafica de sistema de ecuaciones**.

Para resolver el sistema:

$$\begin{cases} x + y = 12 \\ x - y = 6 \end{cases}$$

Como ya sabemos cada ecuación representa una recta, por lo tanto eligiendo dos putos de esa recta se puede dibujar. Comenzaremos encontrando la gráfica de soluciones de cada ecuación.

Una vez graficando las dos ecuaciones se pueden ver el punto donde se cortan las dos rectas:



Como vemos en la gráfica el punto (9,3) es en el cual las dos rectas se cortan y este resultado lo podemos verificar en las ecuaciones del sistema de ecuaciones.

https://www.youtube.com/watch?v=dJ18ERwjNb4

- También puede pasar que las gráficas del sistema sean paralelas (nunca se tocan), entonces en ese caso se dice que el sistema no tiene solución.
- Lo otro que puede pasar es que las gráficas sean iguales, esto significa que cada punto sobre la recta es una solución, por lo tanto son infinitas soluciones.

Sistemas de ecuaciones lineales (resolución algebraica)

Ya hemos visto cómo resolver gráficamente un sistema de ecuaciones, como ese método si bien es sencillo, a veces se nos hace difícil leer el punto en el gráfico. Existen varios métodos para resolver el sistema de ecuaciones sin recurrir a la grafican ahora veremos uno de ellos **el método de reducción por suma o resta**.

El método consiste en **sumar algebraicamente** todos los **términos comunes**, es decir, todas las **X** con las **X**, todas las **Y** con las **Y** y todos los términos independientes entre sí.

Se realiza la **multiplicación de una ecuación** por un numero con el fin de **eliminar alguna** de las dos **incógnitas** y tener como resultado solo una **ecuación con una incógnita**

Para aplicar este método se deben cumplir estas propiedades:

- Si sumamos (o restamos) cantidades iguales a los dos miembros de una ecuación, obtenemos otra ecuación que tiene las mismas soluciones que la primera.
- Si multiplicamos (o dividimos) los dos miembros de una ecuación por un mismo número, obtenemos otra ecuación que tiene las mismas soluciones que la primera.

Veamos un ejemplo:

Tenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} 3x + 4y = 12 \\ 4x + 5y = 15 \end{cases}$$

Para igualar los coeficientes de las x, multiplicamos la primera ecuación por 4 (que es el coeficiente de la **x** en la **segunda ecuación**), y la segunda por 3 (que es el coeficiente de la **x** en la **primera ecuación**). Para igualar los coeficientes de la y, multiplicaríamos la primera ecuación por 5 y la segunda por 4. Recordar que multiplicar por ese número ambos miembros de la igualdad.

$$\begin{aligned} 4\,(3x + 4y) &= 4 \times 12 \\ 3\,(4x + 5y) &= 3 \times 15 \end{aligned}$$

Obtenemos este nuevo sistema equivalente

$$\begin{cases} 12x + 16y = 48 \\ 12x + 15y = 45 \end{cases}$$

En este nuevo sistema los coeficientes de las x son iguales, por lo que podemos restarlos, o lo que es lo mismo multiplicar alguna ecuación por (-1) y sumarlas:

$$\begin{array}{rcrcl} & 12x & + & 16y = & 48 \\ - & 12x & + & 15y = & 45 \\ \hline & 0 & + & \boxed{1y = 3} & \end{array}$$

Aquí podemos tendríamos que despejar la **y** pero como en este caso esta multiplicada por 1, entonces **y = 3**. Ahora hacemos la sustitución en cualquiera de las dos ecuaciones originales (mejor elegir la más sencilla), entonces reemplazamos **y** de la ecuación por **3**.

$$\begin{aligned}
3x + 4y &= 12 \\
3x + 4(3) &= 12 \\
3x + 12 &= 12 \\
3x &= 12 - 12 \\
3x &= 0 \\
x &= \frac{0}{3} \\
\boxed{x = 0}
\end{aligned}$$

Ahora podemos afirmar que **el par (0 , 3) es la solución del sistema**.

Existen casos más sencillos donde solamente se debe sumar las dos ecuaciones para cancelar una incógnita como el siguiente:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Si sumamos las dos ecuaciones directamente nos quedaría así

$$\begin{array}{rcccc}
 & 2x & + & y & = 8 \\
+ & x & - & y & = 3 \\
\hline
 & \boxed{3x} & + & 0 & = 11
\end{array}$$

Y luego despejamos **x**, con ese valor reemplazamos en la **x** de una de las funciones y despejamos **y** para obtener la solución.

$$\begin{aligned}
3x + 0 &= 11 \\
3x &= 11 \\
\boxed{x = \frac{11}{3}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x - y &= 3 \\
\frac{11}{3} - y &= 3 \\
- y &= 3 - \frac{11}{3} \\
- y &= -\frac{2}{3} \\
\boxed{y = \frac{2}{3}}
\end{aligned}$$

$La\ solución\ es: (\frac{11}{3}, \frac{2}{3})$

Aquí hay mas ejemplos de como resolver un sistema de ecuaciones mediante el metodo de la reduccion por suma o resta:

https://www.youtube.com/watch?v=TR27etegq7g

EJERCICIOS

1) En un mismo grafico cartesiano grafiquen las siguientes funciones:

   a) f(x) = 3.x
   b) g(x) = 3.x – 2
   c) h(x) = 3.x + 4

2) En la factura de luz me indican que por bimestre pago un cargo fijo de $15 y un valor de $0,046 por cada Kwh consumido.

   a) Escriba la función que relaciona el gasto en función del consumo de electricidad.
   b) En el **primer bimestre** del año consumí 121Kwh ¿Cuánto pague ese bimestre?
   c) En el **segundo bimestre** consumí el doble de kwh que en el **primero**. El importe a pagar es el doble de lo que pague el bimestre pasado? ¿Por qué?
   d) En el **tercer bimestre** pagué $23,96 ¿Cuántos Kwh consumí?

3) Resuelva gráficamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales y verifique.

   a) $\begin{cases} -2x - y = 8 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$

   d) $\begin{cases} \frac{5}{2}x + 3y = 10 \\ 4x - 3y = -23 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

   e) $\begin{cases} -8x + y = -3 \\ 4x - y = -2 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$

4) Resuelva algebraicamente y gráficamente, luego compare los resultados.

   $\begin{cases} 3x + y = 10 \\ x + y = 4 \end{cases}$

5) Resuelva algebraicamente los siguientes sistemas de ecuaciones lineales:

   a) $\begin{cases} -2x - y = 8 \\ -x + 2y = 4 \end{cases}$

   b) $\begin{cases} x + y = 10 \\ 3x - y = 6 \end{cases}$

   c) $\begin{cases} 3x + 4y = 10 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$