

FINES I

MATEMÁTICA 6° Año

Estimados estudiantes espero que se encuentren bien y en casa, aprovecho para saludarlos y comentarles que en este trayecto la situación que es de público conocimiento nos obliga a la virtualidad, los contenidos estarán explicitado en las guías acompañado de algunas TIC. Les deseo éxitos a todos y quedo a su disposición para recorrer esta etapa. Saludos cordiales el Profe de Matemática.

C.E.N.S. N° 174

GUIA N° 1

Función Exponencial

La **función exponencial** es una función matemática de gran importancia por las muchas aplicaciones que tiene. Se define de la siguiente manera:

$$f(x)=b^x \text{ con } b>0 \text{ y } b\neq 1$$

Donde b es una constante real siempre positiva y diferente de 1, a la cual se conoce como *base*.

Nótese que la variable real x se encuentra en el *exponente*, de esta manera $f(x)$ siempre es un número real.

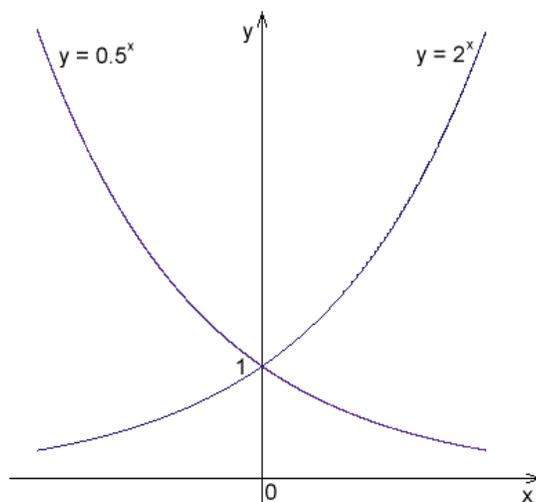


Figura 1. Funciones exponenciales con bases 2 y 1/2

FINES I

MATEMÁTICA 6° Año

Ejemplos de funciones exponenciales son los siguientes:

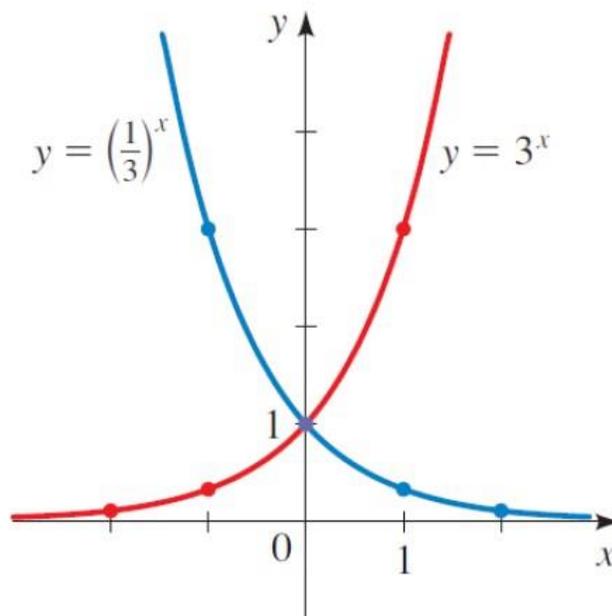
$$f(x) = 2^x$$

$$g(x) = 5 \cdot e^{-3x}$$

$$h(x) = 4 \cdot (10^{2x})$$

Se trata de funciones que crecen –o decrecen, según el signo del exponente- muy rápidamente, por eso se habla del “crecimiento exponencial” cuando alguna magnitud aumenta muy deprisa. Es la razón por la cual son apropiadas para modelar el crecimiento de seres vivos, tales como bacterias.

Otra aplicación muy interesante es la del interés compuesto. Cuanto más dinero se tiene en una cuenta, más intereses devenga, y los mismos se pueden calcular cada cierto intervalo de tiempo, tan pequeño como se quiera.



Las siguientes son las propiedades generales de cualquier función exponencial:

La gráfica de cualquier función exponencial siempre interseca el eje vertical en el punto $(0,1)$, como se puede apreciar en la figura 2. Ello se debe a que $b^0 = 1$ para cualquier valor de b .

-La función exponencial no interseca al eje x , de hecho este eje es una asíntota horizontal para la función.

-Dado que $b^1 = b$, el punto $(1, b)$ siempre pertenece a la gráfica de la función.

-El dominio de la función exponencial lo constituye el conjunto de los números reales y $f(x) = b^x$ es continua en todo su dominio.

-El rango de la función exponencial son todos los números reales mayores que 0, lo cual también se advierte de la gráfica.

-La función exponencial es uno a uno, es decir, cada valor de x perteneciente al dominio de la función, tiene una imagen única en el conjunto de llegada.

La inversa de la exponencial es la función logarítmica.

Propiedades particulares de la función exponencial

Como hemos dicho antes, la función exponencial puede ser creciente o decreciente.

Si se estudia con cuidado la gráfica de la figura 2 se advierte que si $b > 1$, la función es creciente, por ejemplo $y = 3^x$, pero en el caso de $y = (1/3)^x$, con

$b < 1$, la función decrece.

FINES I MATEMÁTICA 6° Año

Tenemos entonces dos tipos de funciones exponenciales con las siguientes propiedades particulares:

Para $b > 1$

La función siempre es creciente.

Cuando aumenta el valor de b , la función crece más rápido, por ejemplo $y = 10^x$ crece más rápido que $y = 2^x$.

Cuando la variable es mayor que 0, la función adquiere valores mayores que 1, es decir:

Para $x > 0$: $y > 1$

-Y si $x < 0$, entonces $f(x) < 1$.

Para $b < 1$

La función es siempre decreciente.

Al disminuir el valor de b , la función decrece más rápido aún. Por ejemplo $y = (1/5)^x$ decrece más rápidamente que $y = (1/3)^x$.

-Para valores de x menores que 0, la función toma valores mayores a 1, es decir:

Para $x < 0$: $y > 1$

-Finalmente, cuando $x > 0$, entonces $y < 1$.

Ejemplos de funciones exponenciales

La función exponencial es muy útil para modelar fenómenos en ciencia y economía, como veremos a continuación:

Función exponencial natural

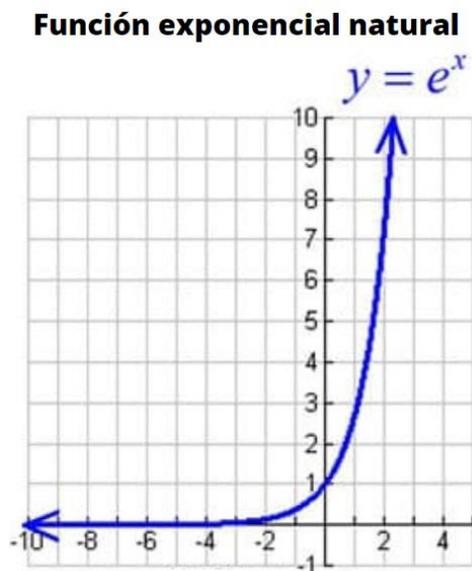


Figura 3: gráfica de la función exponencial natural

Es la función cuya base es el número e o número de Euler, un número irracional cuyo valor es:

$$e = 2.718181828\dots$$

Esta base, aunque no sea un número redondo, funciona muy bien para numerosas aplicaciones. Por lo tanto, se considera la base más importante de todas las funciones exponenciales. La función exponencial natural se expresa en forma matemática como:

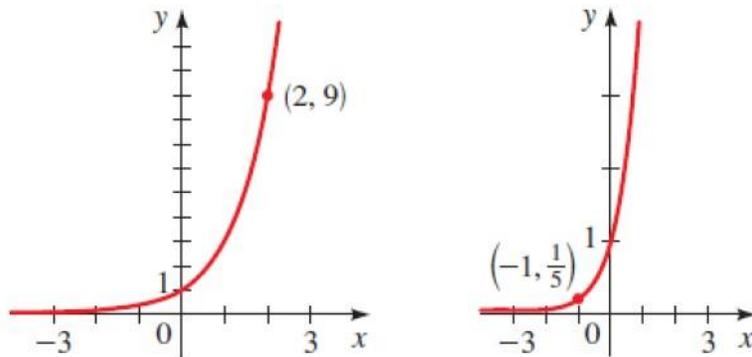
$$f(x) = e^x$$

FINES I MATEMÁTICA 6° Año

La función exponencial aparece con frecuencia en Probabilidad y Estadística, ya que diversas distribuciones de probabilidad, como la distribución normal, la de Poisson y otras, se pueden expresar a través de funciones exponenciales.

Ahora ejercitamos

Indicar a qué función corresponde cada una de las gráficas mostradas a continuación:



Solución a

Como se trata de una gráfica creciente, b es mayor que 1 y sabemos que el punto $(2, 9)$ pertenece a la gráfica, por lo tanto:

$$y = b^x \rightarrow 9 = b^2$$

Sabemos que $3^2 = 9$, por lo tanto, $b=3$ y la función es $y=3^x$

Solución b

Nuevamente sustituimos el punto dado $(-1, 1/5)$ en $y = b^x$ para obtener:

$$1/5 = b^{-1} = 1/b$$

Entonces $b = 5$ y la función buscada es:

$$y = 5^x$$