

Escuela Técnica Obrero Argentino

Docentes:

Correa Claudia Noelia

Rolando Rodríguez

SEXTO AÑO

1° Y 2° División

TURNO: MAÑANA Y TARDE

ÁREA CURRICULAR: MATEMÁTICA

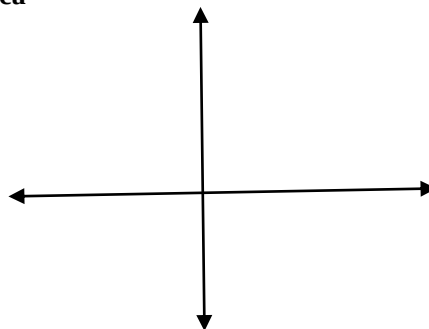
EDUCACION SECUNDARIA TÉCNICA Y FORMACIÓN
PROFESIONAL

TÍTULO: LIMITE DE UNA FUNCIÓN

CONTENIDO SELECCIONADO: Límite. Propiedades de los límites.
Límites infinitos. Límites indeterminados

Límite : Veamos el siguiente ejemplo:

Dada la función $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ cuya gráfica es:



Determinar su dominio

Consideremos el E^* $[-2, 0,3]$

Completar las siguientes tablas:

x	f(x)	x	f(x)
-2,1		-1,9	
-2,01		-1,99	
-2,001		-1,999	
-2,0001		-1,9999	

Es decir:

$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \dots -4 \dots$ $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \dots -4 \dots$ entonces $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \dots 4 \dots$

Observación: Dos funciones que coinciden para todos los valores de x , excepto para $x = a$ tienen el mismo límite.

Propiedades del límite:

Sean f y g dos funciones

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L_1$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_2$$

- 1) El límite de la suma o diferencia de dos funciones es igual a la suma de los límites

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 + L_2$$

Ejemplo:

$$f(x) = x^2 - 4 \cdot x + 2 \quad g(x) = x - \frac{1}{2}$$

- 2) El límite del producto de dos funciones es igual al producto de sus límites

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x) = L_1 \cdot L_2$$

Ejemplo:

$$f(x) = 6 \cdot x \quad g(x) = 3 \cdot x - 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} 6x \cdot 3x - 2 = \lim_{x \rightarrow 2} 6x \cdot \lim_{x \rightarrow 2} 3x - 2 = 12 \cdot 4 = 48$$

- 3) El límite del cociente de dos funciones es igual al cociente de sus límites, si el límite de su denominador es distinto de cero.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{L_1}{L_2} \quad L_2 \neq 0$$

Ejemplo: $f(x) = 3 \cdot x$ $g(x) = x^5 - 5x^2$

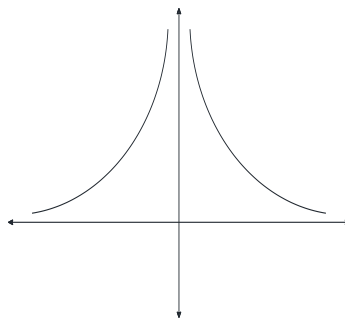
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow 1} 3x}{\lim_{x \rightarrow 1} x^5 - 5x^2} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

Utilizando propiedades resolver

- a) $\lim_{x \rightarrow \pi} (\sin x + \tan x) =$
- b) $\lim_{x \rightarrow 2} [\log(x+8) + \sqrt{x}] =$
- c) $\lim_{x \rightarrow 6} x^{-1} \cdot \sqrt[3]{x+5} =$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} (\cos \pi x - x^3) =$
- e) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x}{2 + \log x} =$

Límites infinitos:

- 1) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x^2}$



Donde $\text{Dom } f(x) = \mathbb{R} - \{0\}$

Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$

Como f no está definida en $x = 0$ lo estudiaremos en un entorno de 0.

$x < 0$

x	f(x)
-0,1	100
-0,01	10.000
-0,001	1.000.000

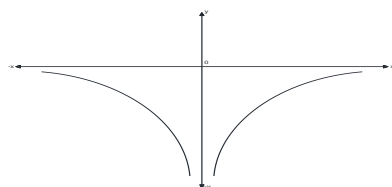
$x > 0$

x	f(x)
+0,1	100
+0,01	10.000
+0,001	1.000.000

Observamos que a medida que x se acerca por izquierda o por derecha a cero la función toma valores positivos cada vez más altos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

- 2) Dada la función $f(x) = -\frac{1}{x^2}$



$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$$

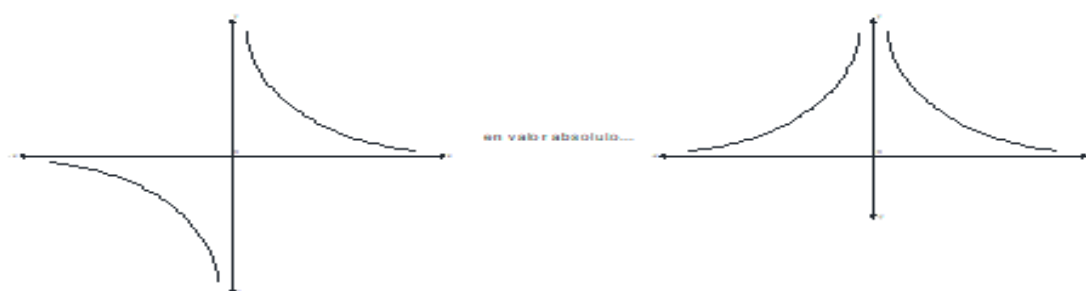
- 3) Dada la función $f(x) = \frac{1}{x}$

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0\}$$

Calcular: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$

Estudiando la función en un entorno de 0, se ve que a medida que x se aproxima a cero por la izquierda la función toma valores negativos cada vez más grande **en valor absoluto**.

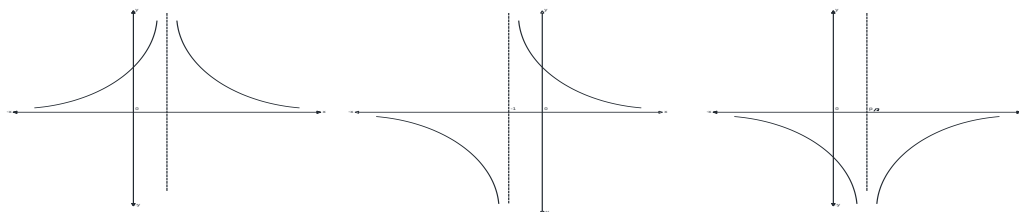
Mientras que a medida que x se aproxima a cero por derecha, la función toma valores positivos cada vez más grandes.



Luego, la función crece indefinidamente en valor absoluto, cuando x tiende a cero

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = \infty$$

Ejercitación: a) Completar:



$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \dots$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} f(x) = \dots$$

b) Calcular los siguientes límites:

$$\text{a) } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{5}{x} \right) = \dots \quad \text{b) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-3}{x} = \dots \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{2x+2} = \dots \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x}{2x+2} = \dots$$

Límites indeterminados:

Ejemplo 1

Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \dots$

Observamos que $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ no está definida en $x = 1$ y que reemplazo directo del valor $x = 1$, nos conduce a la forma indeterminada $\frac{0}{0}$, pues $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{0}{0}$

Entonces como vimos anteriormente en el ejemplo A debemos encontrar una función que sea idéntica en todos los puntos excepto en el punto $x = 1$, para encontrar esta

función debemos factorizar $\frac{x^2-1}{x-1}$

Por lo tanto $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1)}$

Y por la observación podemos decir que sus límites son los mismos, por lo tanto:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+1) \cdot (x-1)}{(x-1)} = 1 + 1 = 2$$

Ejercitación:

Determinar

a) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2-9}{x+3} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2+x}{x} =$

Ejemplo 2

Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 - 2x) =$

La aplicación directa de la propiedad correspondiente al límite de la diferencia, nos conduce a la forma indeterminada $\infty - \infty$

Sin embargo, el límite existe: Para calcularlo extraemos como factor común x elevada al mayor exponente:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (5x^3 - 2x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(5 - \frac{2}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(5 - \frac{2}{x^2} \right) = +\infty \cdot 5 = +\infty$$

Ejemplo 3

Calcular: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2+3}{2x^3+x} \right) =$

La aplicación de la propiedad correspondiente al cociente de funciones conduce a la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, lo que se hace es sacar factor común x , elevada al mayor exponente.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2+3}{2x^3+x} \right) &= \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} \\ &= \frac{0+0}{2+0} = 0 \end{aligned}$$

Existe una forma más sencilla de aplicar este método y es dividiendo término a término por la x elevada al mayor exponente, esto es:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2+3}{2x^3+x} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^3}{x^3} + \frac{x}{x^3} \right)} = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5}{x} + \frac{3}{x^3} \right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 + \frac{1}{x^2} \right)} = \frac{0+0}{2+0} = 0$$

Ejercitación: Determinar:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^4 + 5x^2 - 3) =$ b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^5+4x^3-x+1}{x^5-4x^2+x} \right) =$

Ejercitación Conjunta 1) Aplicar propiedades y calcular:

a- $\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 + \sqrt[5]{10x+2}) =$

b- $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 \cdot \sqrt{x+2}) =$

c- $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 1) \cdot (x^3 - 3x) =$

d- $\lim_{x \rightarrow \pi} (\cos x - 3) =$

a- Calcular :a) $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2-12x+36}{x-6} =$

b- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-x}{x^2-1} =$

c- $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^3+x^2-2x}{x^2+2x} =$

d- $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^5+32}{x^2-4x-12} =$

e- $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2+4x+3}{x^2-9} =$

f- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{x^2+x} =$

g- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5+5x}{2x^2-x^5} =$

h- $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3+2x^2-5x+8}{6x^3-8x+2} =$

Director: Jorge Grosso