

Escuela Técnica Obrero Argentino

Guía N°9

Docentes: Correa Claudia Noelia - Rolando Rodríguez

Sexto Año : 1° Y 2° División

Ciclo: Orientado

Turno: Mañana y Tarde

Área Curricular: MATEMÁTICA

Educación Secundaria Técnica y Formación Profesional

TÍTULO: DERIVADA

CONTENIDO SELECCIONADO: DERIVADAS: Tasa de variación media; definición de derivada.

FORMA DE TRABAJO

Toda la guía se resuelve en el cuaderno y se copian los resultados en el Práctico del final y se envía a:

*6^{to} 2^{da}: CLAUDIACORREA2439@gmail.com y

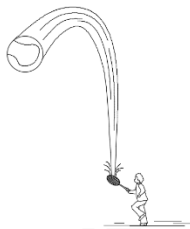
*6^{to} 1^{era}: consultastrabajopracticos@gmail.com

DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

Entre las muchas funciones que has visto en este curso y en el anterior, con frecuencia han aparecido funciones en las que se describía la posición de un móvil al variar el tiempo.

De ellas, una de las más sencillas es la del movimiento uniformemente acelerado. Aquí la tienes de nuevo.

Un tenista da un fuerte raquetazo a una pelota verticalmente hacia arriba.



La altura de la bola en función del tiempo, obedece a la ecuación: $a = 30t - 5t^2$

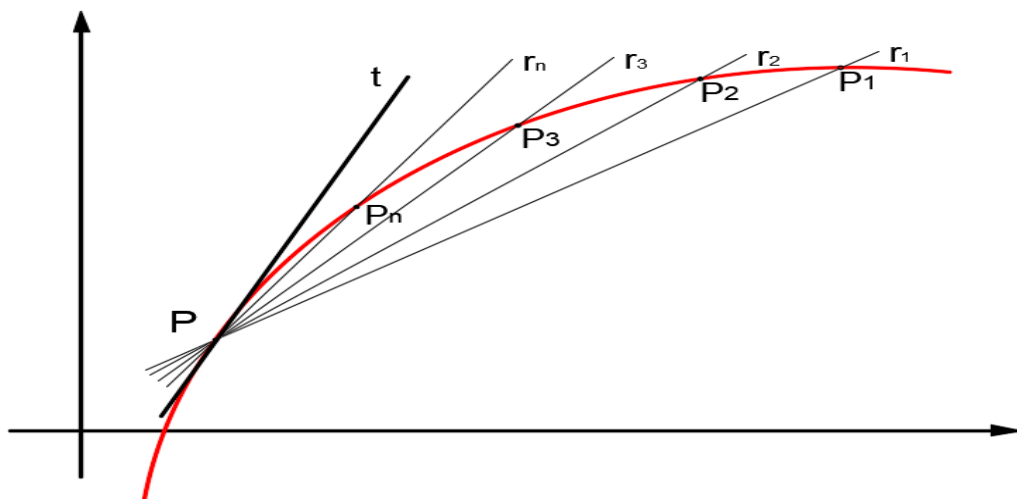
Y queremos saber la velocidad que lleva 2 segundos después del golpe.

Podríamos calcularla aproximadamente, representando la gráfica de la función, trazando la tangente y calculando su pendiente, pero este método además de que requiere tener previamente la gráfica de la función, es poco preciso.

Intentaremos de hacerlo de forma más cómoda y exacta.

¿Cómo calcular la derivada de una función en un punto a partir de su expresión analítica?
Es decir, ¿cómo averiguamos la pendiente de la tangente a una curva sin necesidad de trazarla?

Recta tangente y rectas secantes



La recta t es la tangente de la curva en el punto P .

La recta r_1 es secante a la curva, pues la corta en dos puntos, P y P_1 . También son secantes r_2 , r_3 , y r_n .

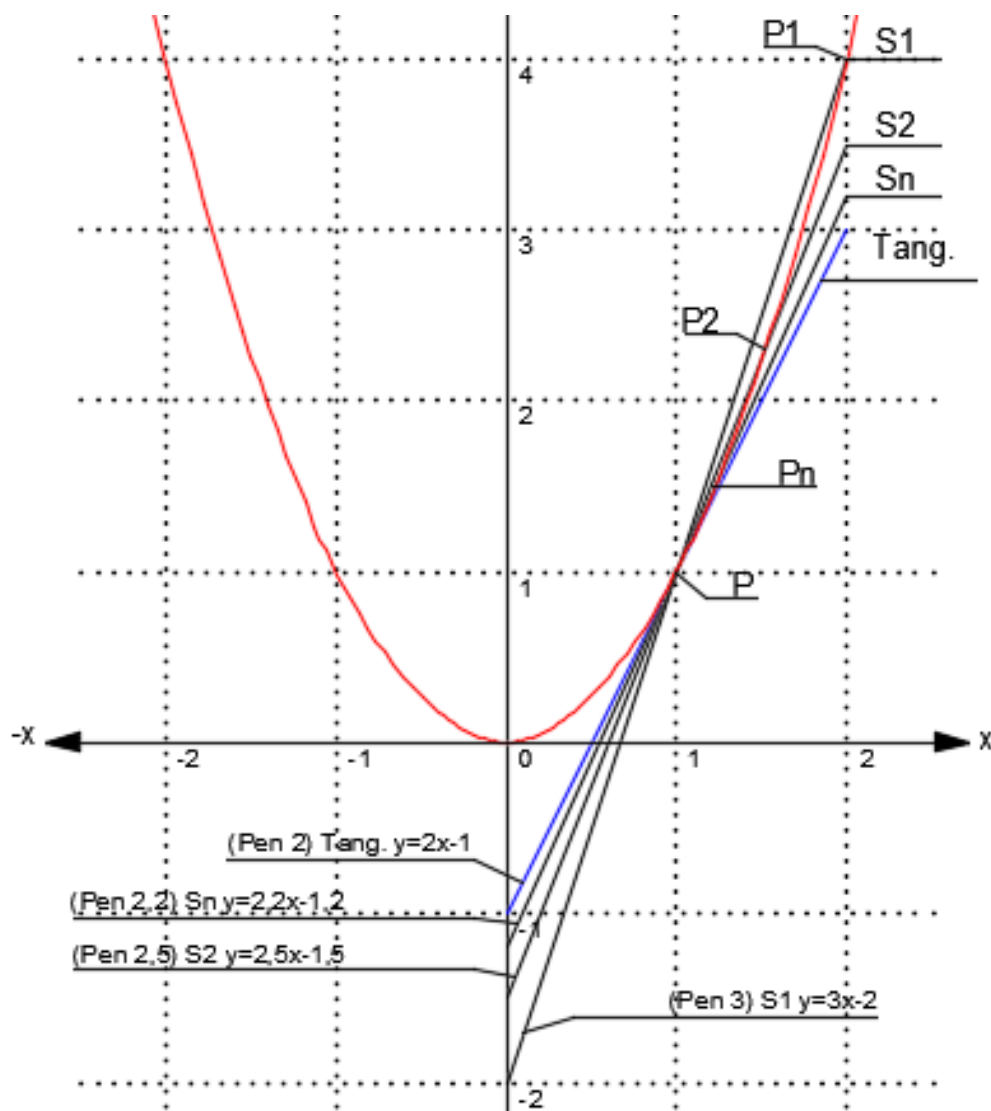
Todas ellas pasan por P y por un segundo punto cada vez más cercano a P . Y, en teoría, podríamos seguir trazando rectas que corten a la curva, además de en P , en puntos cada vez más próximos a él:

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, \dots, P_n$$

Cuanto más próximo a P sea P_n , más pequeño será el ángulo que forme la recta correspondiente con la tangente t . por eso decimos que:

$$t \text{ es el límite de las rectas } r_n \text{ cuando } P_n \rightarrow P$$

Veamos el siguiente ejemplo:



Como observarás la pendiente de s_1 es 3 la de s_2 es 2,5 la de s_n es 2,2 todas van disminuyendo hasta llegar a hacerse el valor de la pendiente de la tangente que es 2.

La pendiente de las secantes tienden a hacerse la pendiente de la tangente; cuando cada uno de los puntos está más cerca de P

$$P_n \rightarrow P$$

Secante $\rightarrow$ Tang.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Pend. Secantes} = \text{Pend. Tang.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{x_1 + h - x_1}$$

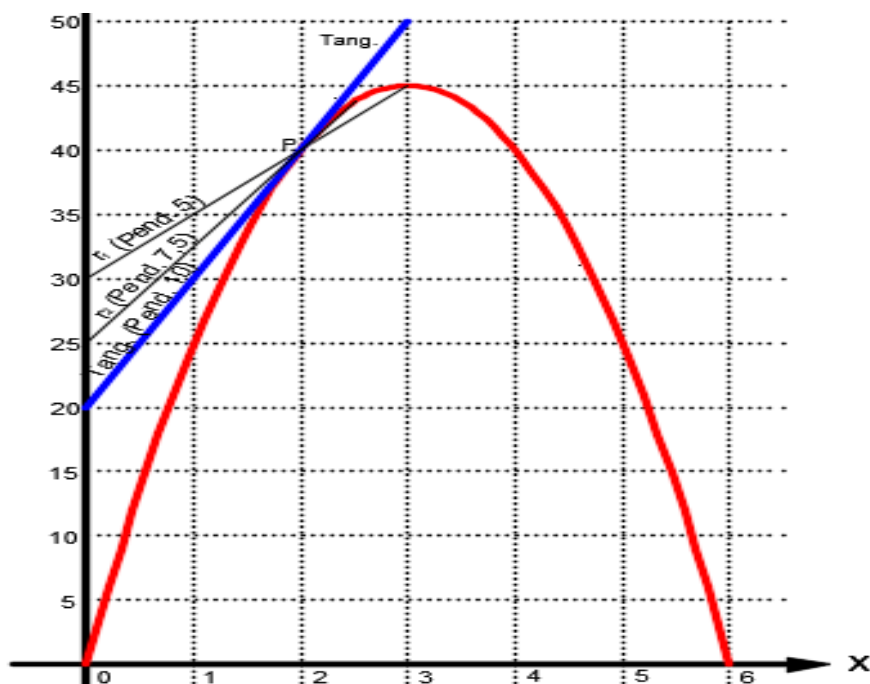
$$\lim_{h \rightarrow 0} \text{Pend. de las Secantes} = \text{Pend. Tang.}$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{x + h - x} = \text{Pend. Tang.}$$

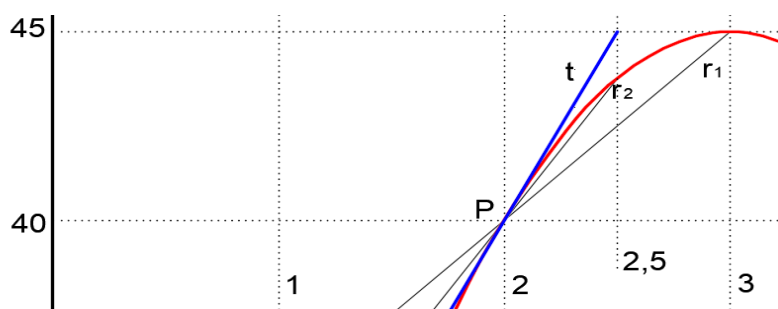
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \text{Pend. Tang.} = V. \text{Instantánea} = f'(x)$$

RESOLUCIÓN DEL PROBLEMA INICIAL

Vamos a calcular la derivada de la función $a = 30t - 5t^2$ en el instante 2, es decir, la pendiente de la recta t tangente a la curva en el punto P . Y lo vamos a hacer aproximándonos a t mediante rectas r que, además de pasar por P , pasan por otro punto P_n de la curva.



Ampliando el sector correspondiente al punto P:



La pendiente de la recta **r** es la **velocidad media** de la pelota en el intervalo **(2; x₁)**.

Calculemos la velocidad media en intervalos de este tipo, **cada vez más pequeños**:

$$T.V.M. [2; 3] = \frac{f(3)-f(2)}{3-2} = \frac{45-40}{3-2} = \frac{5}{1} = 5 \text{ recordar que } 3 \text{ es } = 2+1 \text{ por lo que } f(3) = f(2+h) \quad \boxed{h=1}$$

$$T.V.M. [2; 2,5] = \frac{f(2,5)-f(2)}{2,5-2} = \frac{43,75-40}{2,5-2} = \frac{3,75}{0,5} = 7,5 \text{ recordar que } 2,5 \text{ es } = 2+0,5 \text{ por lo que } f(2,5) = f(2+h) \quad \boxed{h=0,5}$$

$$T.V.M. [2; 2,1] = \frac{f(2,1)-f(2)}{2,1-2} = \frac{40,95-40}{2,1-2} = \frac{0,95}{0,1} = 9,5 \text{ recordar que } 2,1 \text{ es } = 2+0,1 \text{ por lo que } f(2,1) = f(2+h) \quad \boxed{h=0,1}$$

$$T.V.M. [2; 2,01] = \frac{f(2,01)-f(2)}{2,01-2} = \frac{40,0995-40}{2,01-2} = \frac{0,0995}{0,01} = 9,95 \text{ recordar que } 2,01 \text{ es } = 2+0,01 \text{ por lo que } f(2,01) = f(2+h) \quad \boxed{h=0,01}$$

= f (2 + h) (h → 0)

Observa que **las velocidades medias** que se han obtenido, **se van acercando a 10** ¿Será el valor **de f' (2)**? Para verlo, **habrá que calcular el límite de las velocidades medias cuando el intervalo tiende a 0**.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{(2+h) - 2} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[30 \cdot (2+h) - 5 \cdot (2+h)^2] - 40}{(2+h) - 2} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(60 + 30h - 20 - 20h - 5h^2) - 40}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{10h - 5h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (10 - 5h) = 10$$

$$T.V.M. [2; 2 + h] = \frac{f(2 + h) - f(2)}{(2 + h) - 2}$$

Efectivamente, como suponíamos, $f'(2) = 10$

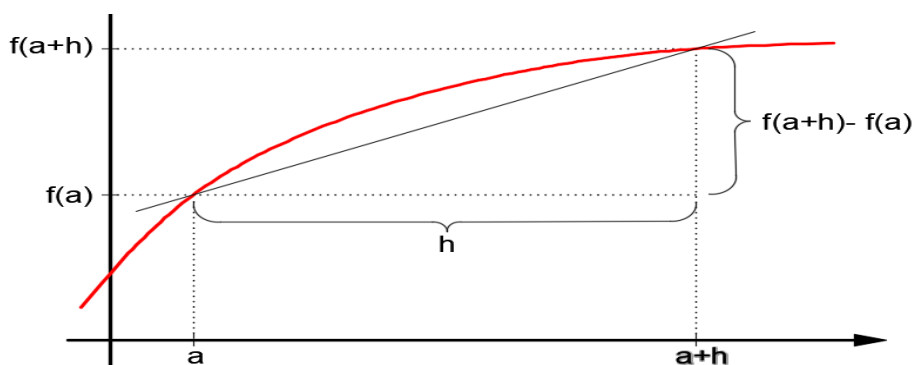
Por ser la derivada, $f'(2)$, el límite de las velocidades medias cuando el intervalo de éstas tiende a 0, se llama **velocidad instantánea**.

Hemos resuelto así el problema planteado en el margen introductorio: **la velocidad de la pelota a los 2 segundos de ser golpeada hacia arriba es de 10m/s.**

GENERALICEMOS ESTOS CONCEPTOS:

Derivada de una función a partir de su expresión analítica:

Para obtener la derivada de una función en un punto a partir de su expresión analítica, debemos aproximarnos a la pendiente de la recta mediante pendientes de rectas secantes.



Esto significa obtener las T.V.M. correspondientes a intervalos con un extremo en a y que tienda a 0. Por lo tanto, será: $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

La derivada de una función en un punto es el límite de la T.V.M. cuando el intervalo tiende a 0.

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ **La derivada de una función en un punto es el límite de la T.V.M. cuando el intervalo tiende a 0.** $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Regla Práctica: Para calcular el límite anterior en casos concretos, suele convenir hacerlo, paso a paso, del siguiente modo:

- 1) Calcular $f(a)$ y $f(a+h)$
- 2) Restarle $f(a)$ a la expresión anterior: $f(a+h) - f(a)$
- 3) Dividir este resultado entre h : $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$
- 4) Calcular el *lim del cociente* $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

Ejemplo 1: Determinar: $f'(2)$ de la función: $f(x) = 2x - 1$ la fórmula es:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

entonces: $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

1^{ero} Determino $f(2)$ con la función: $f(x) = 2x - 1$ reemplazo x por 2

$$* f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Determino $f(2+h)$ con la función: $f(x) = 2x - 1$ reemplazo x por $2+h$

$$* f(2+h) = 2 \cdot (2+h) - 1 = 4 + 2h - 1 = 3 + 2h$$

2^{do} Resto: $f(2+h) - f(2) = 3 + 2h - 3 = 2h$

3^{ero} Reemplazo en la fórmula $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2$ por

lo tanto $f'(2) = 2$

Ejemplo 2: Determinar: $f'(1)$ de la función: $f(x) = 3x$ la fórmula es:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \text{ entonces: } f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

1^{ero} Determino $f(1)$ con la función: $f(x) = 3x$ reemplazo x por 1

$$f(1) = 3 \cdot 1 = 3$$

Determino $f(1+h)$ con la función: $f(x) = 3x$ reemplazo x por $1+h$

$$f(1+h) = 3 \cdot (1+h) = 3 + 3h$$

2^{do} Resto: $f(1+h) - f(1) = 3 + 3h - 3 = 3h$

3^{ero} Reemplazo en la fórmula $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3$ por

lo tanto $f'(1) = 3$

Actividad: Dadas las siguientes funciones determinar sus derivadas por definición:

Función	Determinar	Derivada en el punto	Completar
a) $f(x) = 4x$	$f'(2)$	$f(2) = \dots\dots\dots$ $f(2+h) = \dots\dots\dots$	$f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \dots$
b) $f(x) = -2x$	$f'(4)$	$f(4) = \dots\dots\dots$ $f(4+h) = \dots\dots\dots$	$f'(4) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \dots$
c) $f(x) = -2x + 4$	$f'(1)$	$f(1) = \dots\dots\dots$ $f(1+h) = \dots\dots\dots$	$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \dots$
d) $f(x) = x^2 + 4$	$f'(3)$	$f(3) = \dots\dots\dots$ $f(3+h) = \dots\dots\dots$	$f'(3) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \dots$
e) $f(x) = x^2 + 2x$	$f'(-1)$	$f(-1) = \dots\dots\dots$ $f(-1+h) = \dots\dots\dots$	$f'(-1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \dots$

Director: Jorge Grosso