Establecimiento: C.E.N.S. N°174
Docente: PROF. PACHECO, MIGUEL
Año: TERCERO
Turno: NOCHE
Espacio curricular: MATEMÁTICA
GUÍA: N°7
Tema: TRIGONOMETRÍA, RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

Contenidos: Resolución de triángulos cualesquiera, concepto, aplicación, análisis, calculo.

Objetivo: Conocer y aplicar los conceptos y fórmulas de la resolución de triángulos cualesquiera, para analizar situaciones científicas orientadas a la especialidad y de la vida cotidiana.

Capacidad: Valorar el enriquecimiento personal y colectivo que significa la adquisición de saberes científicos tecnológicos y la posibilidad de expresarlos sin perder su identidad personal y social.

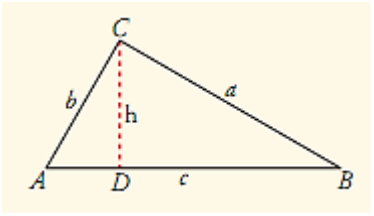
TRIGONOMETRÍA, RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS CUALESQUIERA

TEOREMA DE LOS SENOS

En un triángulo cualquiera, si dos lados son iguales sus ángulos opuestos también lo son; y si un lado es mayor que otro, sus ángulos opuestos también cumplen la misma relación. Esta propiedad se concreta del siguiente modo:

En un triángulo cualquiera de lados a, b, c y ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C},$, se cumplen las siguientes igualdades:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$



Para demostrar la primera de las igualdades, se traza la altura h sobre el lado c, con lo que se obtienen dos triángulos rectángulos ADC y CDB.

$$\left.\begin{array}{l} \text{En } ADC\text{: } sen\,\hat{A} = \dfrac{h}{b} \rightarrow h = b\,sen\,\hat{A} \\ \text{En } CDB\text{: } sen\,\hat{B} = \dfrac{h}{a} \rightarrow h = a\,sen\,\hat{B} \end{array}\right\} b\,sen\,\hat{A} = a\,sen\,\hat{B} \rightarrow \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}}$$

Trazando la altura desde el vértice A se obtendría la segunda igualdad.

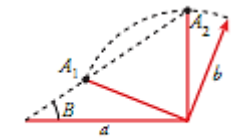
APLICACIONES DEL TEOREMA DE LOS SENOS

El teorema de los senos da lugar a tres igualdades:

$$\frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{b}{sen\,\hat{B}} \qquad \frac{b}{sen\,\hat{B}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}} \qquad \frac{a}{sen\,\hat{A}} = \frac{c}{sen\,\hat{C}}$$

Cada una de ellas relaciona dos lados con los ángulos opuestos. Por tanto, con ellas se puede resolver un triángulo en el cual los datos y las incógnitas sean dos lados y sus ángulos opuestos. (Recordemos que conocer dos ángulos es equivalente a conocer los tres).

TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER	
DATOS	**INCÓGNITA**
Dos ángulos y un lado	Otro lado
Dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos	Otro ángulo

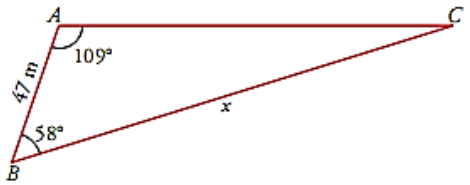


$\hat{A}_1$ es obtuso; $\hat{A}_2$ es agudo

Cuando al aplicar el teorema de los senos la incógnita es uno de los ángulos, puede haber dos soluciones, pues hay dos ángulos con el mismo seno, uno agudo y otro obtuso.

Ejemplo

La distancia de A a B es 47 m. Conocemos los ángulos $\hat{A} = 109°$, $\hat{B} = 58°$. *¿Cuál es la distancia de B a C?*



Empezamos por calcular $\hat{C}$, que es el ángulo opuesto al lado conocido:

$$\hat{C} = 180° - (\hat{A} + \hat{B}) = 13°$$

Aplicamos el teorema de los senos:

$$\frac{x}{sen\,109°} = \frac{47}{sen\,13°} \rightarrow x = 47 \cdot \frac{sen\,109°}{sen\,13°} = 197{,}55$$

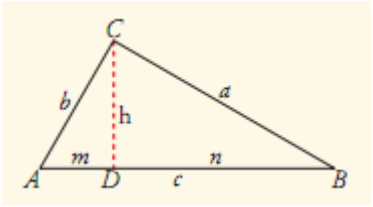
Solución: La distancia de B a C es de 197,55 m.

TEOREMA DEL COSENO

El teorema de Pitágoras se generaliza para triángulos cualesquiera mediante las siguientes igualdades:

En un triángulo cualquiera se cumple que:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\hat{B}$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$$



Para demostrar la primera de las igualdades, aplicamos el teorema de Pitágoras en cada uno de los dos triángulos rectángulos que se forman al trazar la altura h, ADC y CDB.

$$\text{En } CDB \rightarrow a^2 = h^2 + n^2 = h^2 + (c-m)^2 = h^2 + c^2 + m^2 - 2cm$$

$$\text{En } ADC \rightarrow b^2 = h^2 + m^2$$

Restando

$$a^2 - b^2 = c^2 - 2cm$$
$$\downarrow$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$
$$\downarrow(*)$$
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}$$

(*) Para llegar a la última igualdad, tenemos en cuenta que en ADC

$$\cos\hat{A} = \frac{m}{b} \rightarrow m = b\cos\hat{A}$$

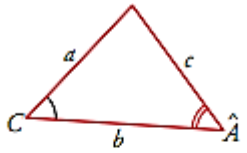
Las otras dos igualdades se prueban de forma similar.

APLICACIONES DEL TEOREMA DEL COSENO

El teorema del coseno sirve para relacionar los tres lados de un triángulo con uno de sus ángulos. Por tanto, se podrá resolver con él cualquier triángulo en el que se conozcan los tres lados, o bien, dos lados y un ángulo.

TRIÁNGULOS QUE SE PUEDEN RESOLVER	
DATOS	**INCÓGNITA**
Los tres lados	Cualquier ángulo
Dos lados y un ángulo	Otro lado

Cuando se conocen dos lados, a, b, y el ángulo que forman, $\hat{C}$, y se desea conocer otro ángulo, $\hat{A}$, es necesario aplicar sucesivamente los dos teoremas:



Primero se calcula c, después $\hat{A}$.

— Con el teorema del coseno, calculamos c: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}$

— Conocido c, aplicamos el teorema de los senos para calcular $\hat{A}$:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\hat{A}} = \frac{c}{\operatorname{sen}\hat{C}} \rightarrow \operatorname{sen}\hat{A} = \frac{a}{c}\operatorname{sen}\hat{C} \rightarrow \hat{A} = \ldots$$

Ejemplo

Conocemos $a = 132$ m, $b = 213$ m, $c = 156$ m. *Calcular el ángulo* $\hat{B}$.

$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\hat{B}$. De esta igualdad despejamos $\cos\hat{B}$:

$$\cos\hat{B} = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ca} = \frac{156^2 + 132^2 - 213^2}{2 \cdot 156 \cdot 132} = -0{,}0876\ldots$$

$\hat{B} = 95{,}027° = 95°\ 1'\ 38''$ (-0.0876 INV cos = 95.02734166 INV sin 95°1°38.43)

Actividades

1 Conocemos $a = 7$ cm, $b = 11$ cm, $c = 15$ cm. Calcula $\hat{C}$.

Solución:

2 Sabemos que la distancia en línea recta de Perales a Ciruelo de Arriba es 3,6 km y de Perales a Ciruelo de Abajo, 5,4 km. El ángulo que forman Ciruelo de Arriba y Ciruelo de Abajo, desde Perales, es de 57°. ¿Cuál es la distancia entre Ciruelo de Arriba y Ciruelo de Abajo?

Solución:

3 Conocemos $b = 17$ m, $c = 11$ m, $\hat{A} = 113°$. Calcula $\hat{B}$. (Recuerda, primero has de calcular a).

Solución:

Para cualquier duda y presentar las guías para ver si están bien comunicarse a:

mipacheco@sanjuan.edu.ar

Bibliografía:

Cuadernillo de ingreso de matemática. Universidad Nacional de San Juan Facultad de Arquitectura, Urbanismo y Diseño.

Formación para Personas Adultas. Procesos e instrumentos matemáticos. Óscar Serrano Gallego. Ed. PRETEXTO

Matemática. Programa de Educación a Distancia. Nivel Medio Adultos. Cordoba

El libro de la Matemática 7, Canteros, L., Felissia, A., Fregona, D.; Ed. Estrada, Bs. As. 1997.

El libro de la matemática 8, Guelman, N., Itzcovich, H., Pavesi, L., Rudy, M. Ed. Estrada, Bs. As., 1998.

Directivo a cargo de la institución. Lic. Moreno, Gabriela