Escuela Agrotécnica Ejército argentino

Docente: Arias Cintia

Año, Ciclo y/o Nivel: 5º año 2º división – ciclo orientado de la educación secundaria

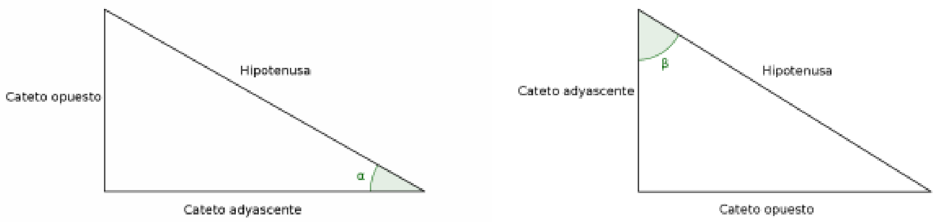
Turno: mañana

Área Curricular: Matemática I

Título de la propuesta: Trigonometría

Funciones trigonométricas

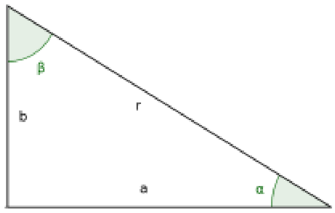
Una primera manera de definir las funciones trigonométricas es a partir de un triángulo rectángulo. Un triángulo rectángulo es aquél que tiene un ángulo recto como uno de sus ángulos interiores. En este caso, los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos, y el tercer lado es la hipotenusa. Si uno toma un ángulo interior, que no sea el ángulo recto, entonces el cateto que forma dicho ángulo será el cateto adyacente, mientras que el otro será el cateto opuesto.



Las funciones trigonométricas son el seno, sen; el coseno, cos, y la tangente, tan y se definen como:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} \alpha &= \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Hipotenusa}} \\
\cos \alpha &= \frac{\text{Cateto adyascente}}{\text{Hipotenusa}} \\
\tan \alpha &= \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} = \frac{\text{Cateto opuesto}}{\text{Cateto adyascente}}
\end{aligned}$$

Entonces en el triángulo, de la figura siguiente, formado por los lados r, a y b, las funciones trigonométricas serán:



$$\begin{aligned} \text{sen } \alpha &= \frac{b}{r} & \text{sen } \beta &= \frac{a}{r} \\ \cos \alpha &= \frac{a}{r} & \cos \beta &= \frac{b}{r} \\ \tan \alpha &= \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a} & \tan \beta &= \frac{\text{sen } \beta}{\cos \beta} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

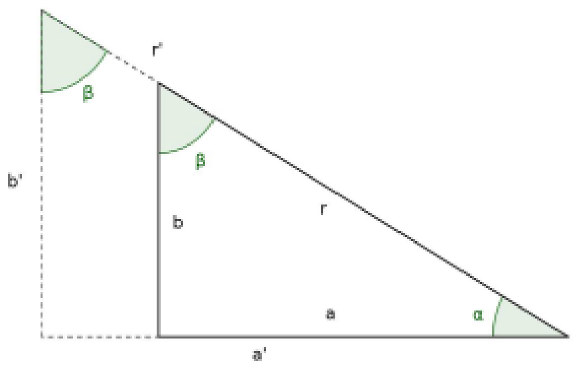
El teorema de Pitágoras (que demostraremos más a delante) dice que $r^2 = a^2 + b^2$. De aquí se tiene que $r^2 \geq a^2$ y $r^2 \geq b^2$. Aplicando raíz cuadrada en ambos miembros obtenemos que $r \geq a$ y $r \geq b$. Luego $1 \geq |\frac{a}{r}|$ y $1 \geq |\frac{b}{r}|$. Finalmente, teniendo en cuenta que $\cos\ \alpha = \text{sen}\ \beta = \frac{a}{r}$ y $\text{sen}\ \alpha = \cos\ \beta = \frac{b}{r}$ resulta que:

$$\begin{aligned} |\cos\ \alpha| = |\text{sen}\ \beta| \leq 1 \\ |\text{sen}\ \alpha| = |\cos\ \beta| \leq 1 \end{aligned}$$

De este resultado se puede decir que para cualquier ángulo, α, tenemos que:

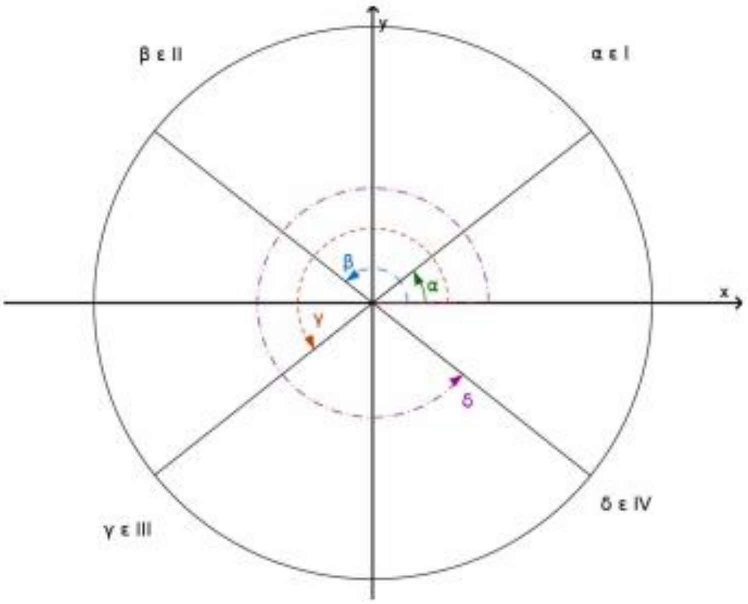
$$\boxed{\begin{aligned} -1 \leq \text{sen}\,\alpha \leq 1 \\ -1 \leq \cos\alpha \leq 1 \end{aligned}}$$

Si ahora agrandamos el triángulo sin modificar sus ángulos interiores, por ejemplo el triángulo formado por los lados r ′, a ′ y b ′ , resulta que

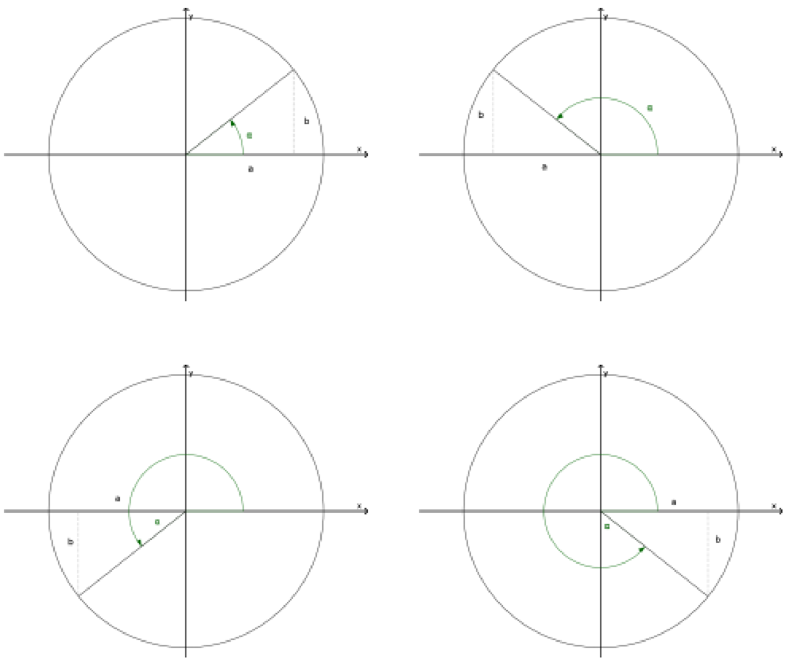


$$\begin{array}{lclcl} \text{sen}\ \alpha & = & \frac{b}{r} = \frac{b'}{r'} & \quad \text{sen}\ \beta & = & \frac{a}{r} = \frac{a'}{r'} \\ \cos\ \alpha & = & \frac{a}{r} = \frac{a'}{r'} & \quad \cos\ \beta & = & \frac{b}{r} = \frac{b'}{r'} \\ \tan\ \alpha & = & \frac{b}{a} = \frac{b'}{a'} & \quad \tan\ \beta & = & \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} \end{array}$$

Esto significa que el valor de las funciones trigonométricas depende del ángulo y no del tamaño del triángulo. Por lo tanto podemos deshacernos del triángulo y extender las funciones trigonométricas a todos los ángulos (y no restringirnos a los ángulos menores que 180◦ solamente como veníamos haciendo). Entonces ahora vamos a trabajar en lo que se llama la circunferencia trigonométrica, que es una circunferencia de radio unidad cuyo centro coincide con el origen del sistema de coordenadas cartesiano. En el sistema de ejes cartesianos, el plano x y se divide en 4 cuadrantes: el primer cuadrante corresponde al semiplano en el cual x e y son positivos; en el segundo cuadrante $x < 0$ e $y > 0$; en el tercer cuadrante x e y son negativos, y en el cuarto cuadrante $x > 0$ e $y < 0$. Estos cuadrantes se denotan con números romanos. Con este criterio y teniendo en cuenta que los ángulos positivos se miden desde el eje positivo de las abscisas y en sentido anti horario tendremos que un ángulo pertenece al primer cuadrante si está entre 0 y $\pi/2$, pertenece al segundo cuadrante si está entre $\pi/2$ y π, pertenece al tercer cuadrante si está entre π y $(3/2)\pi$; y pertenece al cuarto cuadrante si está entre $(3/2)\pi$ y 2π



Para calcular el valor de las funciones trigonométricas en la circunferencia, lo que se hace es asociarle un triángulo rectángulo a cada ángulo. Este triángulo se construye trazando un segmento paralelo al eje de la ordenadas desde el punto de intersección entre el lado del ángulo y la circunferencia, hasta el eje de la abscisas. Entonces:



$$\text{sen } \alpha = \frac{b}{1} = b \quad \cos \alpha = \frac{a}{1} = a \quad \tan \alpha = \frac{\text{sen } \alpha}{\cos \alpha} = \frac{b}{a}$$

Ejercicio

1_Completa con V (verdadero) o F (falso) según corresponda. Justifica.

a) Si el coseno de un ángulo es negativo, el ángulo pertenece al tercer o cuarto cuadrante.

b) Si el coseno de un ángulo es negativo y el seno del mismo ángulo es positivo, el ángulo pertenece al segundo cuadrante.

c) Si la tangente de un ángulo es positiva, se puede asegurar que dicho ángulo pertenece al primer cuadrante.

d) Si un ángulo pertenece al tercer cuadrante, el seno de dicho ángulo es positivo.

e) Si el seno de un ángulo es positivo y la tangente es positiva, el ángulo pertenece al primer cuadrante.

2_ Completa la tabla con los valores de seno y coseno usando la calculadora. Luego con los valores obtenidos dibuja la función en los ejes cartesianos.

	0º	30º	60º	90º	120º	150º	180º	225º	270º	300º
Sen				1						
Cos	1									

ejemplo: