Escuela Agrotécnica Ejército argentino

Docente: Arias Cintia

Año, Ciclo y/o Nivel: 5º año 2º división – ciclo orientado de la educación secundaria

Turno: mañana

Área Curricular: Matemática I

Título de la propuesta: Radicales

Radicales

Definición

Llamamos raíz n-ésima de un número dado a al número b que elevado a nos da a

$$\boxed{\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a}$$

Un radical es equivalente a una potencia de exponente fraccionario en la que el denominador de la fracción es el índice del radical y el numerador de la fracción es el exponente el radicando.

$$\boxed{\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}}$$

Propiedades

Raíz de un producto

La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.

$$\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$$\sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2 \cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[7]{b^4}$$

Raíz de un cociente

La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

Raíz de una potencia

Para hallar la raíz de una potencia, se calcula la raíz de la base y luego se eleva el resultado a la potencia dada.

$$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

Demostración: $\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Raíz de una raíz

La **raíz n-ésima** de la **raíz m-ésima** de un número es igual a la raíz **nm-ésima** de dicho número.

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Demostración: $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$

Simplificación

Racionalización

Racionalizar una expresión con un radical en el denominador, consiste en encontrar una expresión equivalente que no tenga raíces en el denominador.
Para ello se multiplica numerador y denominador por la expresión adecuada para que, al operar, la raíz desaparezca.
Si el denominador es un binomio se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado* del denominador.

* **El conjugado de** a + b **es** a − b

Cuando el denominador es un radical

$$\frac{1}{\sqrt[3]{5}} = \frac{1\cdot\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^2}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \frac{\sqrt[3]{25}}{5}$$

$$\frac{1}{\sqrt[7]{x^4}} = \frac{1\cdot\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^4}\cdot\sqrt[7]{x^3}} = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{\sqrt[7]{x^7}} = \frac{\sqrt[7]{x^3}}{x}$$

Cuando el denominador es un binomio

$$\frac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{5-3} = \frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}$$

Simplificar un radical

Simplificar un radical es escribirlo en la forma más sencilla, de forma que:

- El índice y el exponente Sean primos entre sí.
- No se pueda extraer ningún factor Del radicando.
- El radicando no tenga ninguna fracción.

$$\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$$

$$\sqrt[7]{a^{30}} = a^4\sqrt[7]{a^2}$$

Operaciones con radicales

Suma y Resta de Radicales

Para sumar o restar radicales se necesita que sean semejantes (que tengan el mismo índice y el mismo radicando), cuando esto ocurre se suman ó restan los coeficientes de fuera y se deja el radical.

$$\sqrt{8} + \sqrt{2} = \sqrt{2^3} + \sqrt{2} = \\ = 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$$

$$\sqrt{x} + \sqrt[6]{x^3} = \sqrt{x} + \sqrt{x} = 2\sqrt{x}$$

Producto de Radicales

Para multiplicar radicales se necesita que tengan el mismo índice, cuando esto ocurre el resultado es un radical del mismo índice y de radicando el producto de los radicandos.
Si tienen distinto índice, primero se reduce a índice común.

$$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt{2} = \sqrt[6]{3^2}\cdot\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{9\cdot 8} = \sqrt[6]{72}$$

$$\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt{x} = \sqrt[10]{x^2}\cdot\sqrt[10]{x^5} = \sqrt[10]{x^7}$$

Cociente de Radicales

Para dividir radicales se necesita que tengan el mismo índice, cuando esto ocurre el resultado es un radical del mismo índice y de radicando el cociente de los radicandos.
Si tienen distinto índice, primero se reduce a índice común.

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[6]{2^3}}{\sqrt[6]{2^2}} = \sqrt[6]{2}$$

$$\frac{\sqrt[4]{x}}{\sqrt[8]{x}} = \frac{\sqrt[8]{x^2}}{\sqrt[8]{x}} = \sqrt[8]{x}$$

Trabajo practico

1. Escribe como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt{5}$ b) $\sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt{a^3}$ d) $\sqrt[5]{a^3}$

2. Escribe como un radical:

a) $3^{\frac{1}{2}}$ b) $5^{\frac{3}{2}}$

c) $x^{\frac{1}{5}}$ d) $x^{\frac{5}{3}}$

3. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[4]{25}$ b) $\sqrt[8]{8^2}$

c) $\sqrt[14]{x^6}$ d) $\sqrt[30]{16 \cdot x^8}$

4. Extraer todos los factores posibles de los siguientes radicales

a) $\sqrt{18}$ b) $\sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{9a^3}$ d) $\sqrt{98a^3b^5c^7}$

5. Introducir dentro del radical todos los factores posibles que se encuentren fuera de él.

a) $3\sqrt{5}$ b) $2\sqrt{a}$

c) $3a\sqrt{2a^2}$ d) $ab^2\sqrt[3]{a^2b}$

6. Reduce al mínimo común índice los siguientes radicales.

a) $\sqrt{5};\sqrt[4]{3}$ b) $\sqrt[3]{4};\sqrt[4]{3};\sqrt{2}$

c) $\sqrt[4]{3};\sqrt[5]{7};\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3};\sqrt[6]{32};\sqrt[3]{5}$

7. Suma los siguientes radicales indicados.

a) $\sqrt{45}-\sqrt{125}-\sqrt{20}$

b) $\sqrt{75}-\sqrt{147}+\sqrt{675}-\sqrt{12}$

c) $\sqrt{175}+\sqrt{63}-2\sqrt{28}$

d) $\sqrt{20}+\frac{1}{3}\sqrt{45}+2\sqrt{125}$

8. Multiplica los siguientes radicales

a) $\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$ b) $5\sqrt{2}\cdot 3\sqrt{5}$

c) $\sqrt[3]{12}\cdot\sqrt[3]{9}$ d) $\sqrt{x}\cdot\sqrt[3]{2x^2}$

e) $\sqrt{2ab}\cdot\sqrt[4]{8a^3}$ f) $\sqrt[4]{2x^2y^3}\cdot\sqrt[6]{5x^2}$

9. Multiplica los siguientes radicales

a) $\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)\sqrt{2}$

b) $(7\sqrt{5}+5\sqrt{3})\cdot 2\sqrt{3}$

c) $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-5\sqrt{2})\cdot 4\sqrt{2}$

d) $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

10. Divide los siguientes radicales

a) $\dfrac{\sqrt{6x}}{\sqrt{3x}}$ b) $\dfrac{\sqrt{75x^2y^3}}{5\sqrt{3xy}}$

c) $\dfrac{\sqrt{9x}}{\sqrt[3]{3x}}$ d) $\dfrac{\sqrt[3]{8a^3b}}{\sqrt[4]{4a^2}}$

e) $\dfrac{\sqrt[3]{9}}{\sqrt[9]{3}}$ f) $\dfrac{\sqrt[6]{x^5}}{\sqrt[8]{x^3}}$

11. Calcula:

a) $\sqrt[5]{2\sqrt[4]{2}}$ b) $\sqrt[5]{x^2\sqrt[4]{x^3}}$

c) $\sqrt[4]{x^3\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}}$ d) $\sqrt[6]{2\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}$

12. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{7}}$ b) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

c) $\dfrac{2a}{\sqrt{2ax}}$ d) $\dfrac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$

13. Racionaliza.

a) $\dfrac{2}{\sqrt{3}-1}$ b) $\dfrac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$

c) $\dfrac{5}{4-\sqrt{11}}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+1}$