

ESCUELA: C.E.N.S 74: JUAN VUCETICH

CUE: 700024200

DOCENTES: SILVANA BARILARI- VANESA SAAVEDRA.

GUIA: 9

ÁREA CURRICULAR: MATEMÁTICA AÑO: 2°1°- 2°3° NIVEL: ADULTOS

TEMAS A ABORDAR: SISTEMA LINEAL DE DOS ECUACIONES CON DOS INCOGNITAS. METODOS DE SOLUCION. FUNCION CUADRATICA. CARACTERISTICAS.

Queridos alumnos, debido a la situación que es de público conocimiento a continuación les propongo una serie de actividades en relación al tema ecuaciones. Les pido su **compromiso** con su realización ya que luego de esta ejercitación se **dará por visto el contenido y será evaluado** posteriormente por medio de una actividad que se planteará luego.

Mails de contacto:

ingenierasmbarilarip@gmail.com
vane_arq_master@hotmail.com

SOPORTE TEÓRICO Y EJERCITACIÓN AL FINALIZAR CADA TEMA.**A. SISTEMA LINEAL DE DOS ECUACIONES CON DOS INCÓGNITAS**

Un sistema lineal con dos ecuaciones y dos incógnitas está formado por dos ecuaciones lineales y dos indeterminadas, generalmente x e y. Resolverlo consiste en determinar los valores de x e y que hacen ciertas simultáneamente las dos igualdades. Un sistema de este tipo puede no tener solución (sistema incompatible), tener una solución (sistema compatible determinado) o tener infinitas soluciones (sistema compatible indeterminado). Veamos un ejemplo de cada uno de los casos:

Sistema incompatible

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x+y=3 \end{cases} \quad \text{Cualesquiera que sean los valores que tomen } x \text{ e } y, \text{ no pueden cumplir simultáneamente las dos ecuaciones pues si } x+y=2 \text{ no puede ser que } x+y=3.$$

Sistema compatible determinado, solución única.

$$\begin{cases} x+y=2 \\ x=3 \end{cases} \Rightarrow 3+y=2 \Rightarrow y=-1, \text{ Sol: } x=3, y=-1$$

Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones.

$$\begin{cases} x+y=1 \\ 2x+2y=2 \end{cases} \quad \text{Este caso se produce cuando las ecuaciones son proporcionales, es decir, una ecuación es igual a la otra multiplicada por un número, en este ejemplo la segunda ecuación es igual a la primera por 2. La segunda ecuación no proporciona información para la resolución del sistema, entonces } x+y=1, \text{ luego } y=1-x. \text{ Cualquier par de números de la forma } (x, 1-x) \text{ son solución del sistema.}$$

B. METODOS DE RESOLUCION:

Como dijimos dos ecuaciones de una de primer grado, con dos incógnitas cada una determinan un sistema de ecuaciones. Cada una de las ecuaciones del sistema tiene por solución a todos los puntos de una recta.

La solución del sistema es el punto de intersección de ambas rectas. Si las rectas son paralelas, no tiene solución.

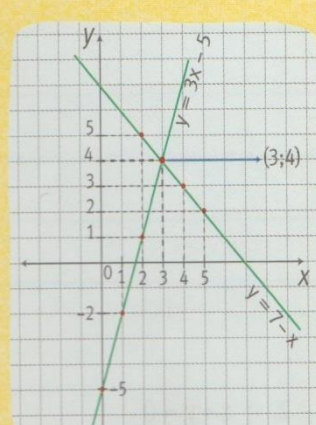
1. Resolución gráfica:

Se representan gráficamente ambas rectas y el punto de intersección de las mismas es la solución del sistema.

$$\begin{cases} 3x - y = 5 \Rightarrow y = 3x - 5 \\ x + y = 7 \Rightarrow y = 7 - x \end{cases}$$

La solución del sistema es el punto (3;4), lo que significa que $x = 3$ y $y = 4$.

x	y = 3x - 5	x	y = 7 - x
0	-5	2	5
1	-2	3	4
2	1	4	3
3	4	5	2



2. RESOLUCION ANALITICA: *hay varios métodos analíticos para hallar la solución de un sistema de ecuaciones; dos de ellos son:*

✚ Método de SUSTITUCION :

- 1º Despejamos una incógnita en una de las dos ecuaciones. La que veamos más fácil.
- 2º Sustituimos en la otra ecuación la incógnita despejada.
- 3º Resolvemos la ecuación resultante, que es de primer grado y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
- 4º Sustituimos el valor obtenido en la ecuación despejada al principio para obtener el valor de la otra incógnita.
- 5º Comprobamos los resultados sustituyendo los valores de x e y en las dos ecuaciones para ver si se cumplen.

Resolver el siguiente sistema por sustitución:
$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases}$$

Observar bien las dos ecuaciones antes de decidir que incógnita despejar y de que ecuación.

En el ejemplo despejar *la x de la 1ª* o *la y de la 2ª* nos resultaría mas complicado para resolver, al despejar nos quedaría una fracción.

$$\begin{aligned} 1^{\text{a}} \text{ ecuación} & \quad \begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases} \\ 2^{\text{a}} \text{ ecuación} & \end{aligned}$$

$$1^{\circ} \text{ Despejamos la } y \text{ de la } 1^{\text{a}} \text{ ecuación} \Rightarrow y = 7 - 2x$$

$$2^{\circ} \text{ Sustituimos la } y \text{ en la } 2^{\text{a}} \text{ ecuación} \Rightarrow x + 3(\overbrace{7 - 2x}^y) = 11$$

$$3^{\circ} \text{ Resolvemos para obtener } x \Rightarrow x + 21 - 6x = 11 \Rightarrow x = 2$$

$$4^{\circ} \text{ Obtenemos el valor de } y \text{ sustituyendo el valor de } x \text{ en la } 1^{\text{a}} \text{ ecuación despejada.}$$

$$y = 7 - 2x \Rightarrow y = 7 - 2 \cdot 2 \Rightarrow y = 3$$

Solución del sistema: $x = 2, y = 3$

$$5^{\circ} \text{ Comprobamos sustituyendo los valores de } x \text{ e } y \text{ en el sistema, si las dos ecuaciones se cumplen lo tenemos bien.}$$

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ x + 3y = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 \cdot 2 + 3 = 7 \\ 2 + 3 \cdot 3 = 11 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7 = 7 \\ 11 = 11 \end{cases}$$

✚ Método de IGUALACION :

1. Despejamos la misma incógnita en las dos ecuaciones.
2. Igualamos las dos expresiones
3. Resolvemos la ecuación resultante y obtenemos el valor de una de las incógnitas.
4. Sustituimos el valor de la incógnita obtenida en cualquiera de las dos ecuaciones despejadas al principio para obtener el valor de la otra incógnita.

Resolver por igualación el sistema :
$$\begin{cases} 3x - 2y = 8 \\ x + y = 6 \end{cases}$$

1. Despejamos la x en las dos ecuaciones.

$$\begin{array}{l} 1^a \quad \begin{cases} 3x - 2y = 8 \end{cases} \rightarrow x = \frac{8+2y}{3} \\ 2^a \quad \begin{cases} x + y = 6 \end{cases} \rightarrow x = 6 - y \end{array}$$

2. Igualamos las dos expresiones de x

$$\frac{8+2y}{3} = 6 - y$$

3. Resolvemos la ecuación resultante y obtenemos el valor de y .

$$8 + 2y = 18 - 3y \Rightarrow y = 2$$

4. Sustituimos el valor de y en cualquiera de las dos ecuaciones

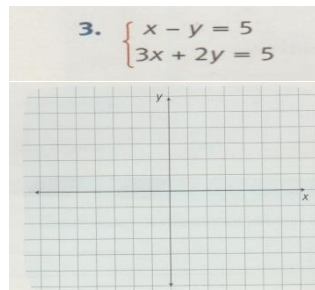
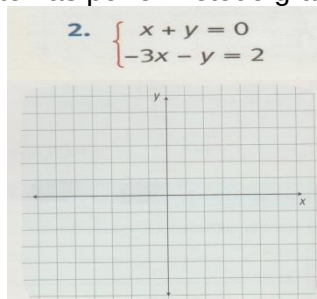
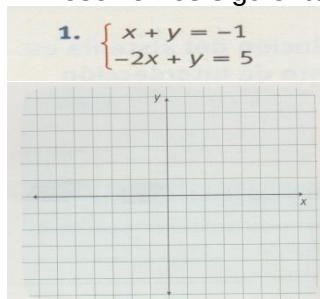
$$x = 6 - y \Rightarrow x = 6 - 2 \Rightarrow x = 4 \quad \text{Solución : } x = 4; y = 2$$

C. ACTIVIDADES :

1. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones por sustitución e igualación.

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 9 \end{cases}$$

2. Resolver los siguientes sistemas por el método gráfico.



3. Resuelva cada uno de los siguientes sistemas por el método más conveniente.

$$\begin{array}{ll} 1. \begin{cases} 3x + y = -3 \\ x + 2y = 4 \end{cases} & 2. \begin{cases} x + 2y = 9 \\ -3x + y = 8 \end{cases} & 3. \begin{cases} -x + 3y = 4 \\ x - 2y = -2 \end{cases} & 4. \begin{cases} 2x + 3y = 2 \\ 4x - 9y = -1 \end{cases} & 5. \begin{cases} \frac{1}{2}x - y = -5 \\ x + \frac{1}{3}y = -3 \end{cases} & 6. \begin{cases} x + y = -\frac{5}{4} \\ 2x - y = 2 \end{cases} \end{array}$$

4. Resuelve los siguientes problemas planteando previamente el sistema.

- a) La suma de dos números es 13 y su diferencia, 5. ¿Cuáles son los números?
- b) El triple de un número es igual a la cuarta parte de otro y la suma de ambos es 13. ¿De qué números se trata?
- c) El perímetro de un rectángulo es 140cm y la base es 20cm más larga que la altura. ¿Cuál es la superficie del rectángulo?
- d) La superficie de un triángulo es 25cm², siendo la altura del mismo el doble de la base. ¿Cuánto mide la base del triángulo?
- e) En una alcancía hay 25 monedas de \$1 y \$0,50; si hay en total \$19, ¿Cuántas monedas de cada clase hay en la alcancía?
- f) En un corral hay gallinas y chanchos. Si se cuentan 30 cabezas y 94 patas, ¿Cuántas gallinas y chanchos hay en el corral?

D. FUNCION CUADRATICA

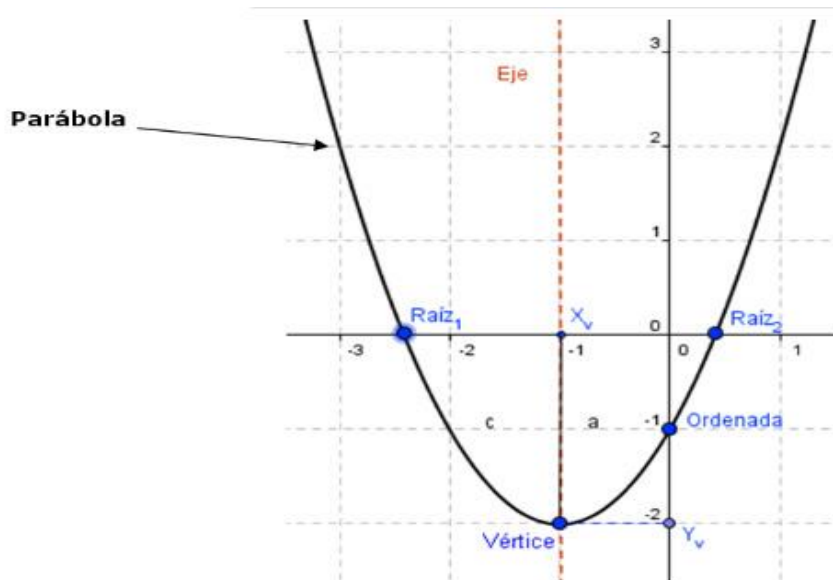
Objetivo de las Actividades:

- Identificar y reconocer las partes de la función cuadrática (eje de simetría, vértices, raíces) mirando gráficos.
- Estudiar y calcular gráfica y analíticamente las raíces y el vértice de funciones cuadráticas.

Actividad1: Antes de comenzar, analicen junto con el docente la siguiente información sobre la función cuadrática:

- Toda función cuadrática se puede expresar de la siguiente forma: $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a , b y c son números reales y $a \neq 0$. Esta forma de escribir a la función cuadrática se denomina **polinómica**.

- El gráfico de una función cuadrática está formado por puntos que pertenecen a una curva llamada **parábola**. Miren el gráfico y vean los elementos que se distinguen en él:



Raíces (raíz₁ y raíz₂): las raíces o ceros de la función cuadrática son aquellos valores de x para los cuales la expresión vale 0. Gráficamente, las raíces corresponden a las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x .

Podemos determinar las raíces de una función cuadrática igualando a cero la función $f(x) = 0$, y así obtendremos la siguiente ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Para calcular las raíces se utiliza la siguiente fórmula:

Eje de simetría (eje): representa la recta vertical simétrica con respecto a la parábola. El eje de simetría de una parábola puede determinarse mediante la

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

siguiente expresión:

donde x_1 y x_2 son las raíces de la función cuadrática.

Vértice (vértice): el vértice de la parábola está ubicado sobre el eje de simetría y es el único punto de intersección de la parábola con el eje de simetría. A la coordenada x de este punto la llamaremos x_v y a la y , y_v . El vértice de la parábola vendrá dado por las siguientes coordenadas: $V = (x_v; y_v)$.

Las coordenadas del vértice también pueden hallarse analíticamente por las siguientes expresiones:

El valor x_v se obtiene con la misma expresión que el eje de simetría:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Una vez obtenido el valor x_v podemos determinar y_v evaluando la función cuadrática $y_v = f(x_v)$.

✚ A partir de lo analizado anteriormente, contesten las siguientes preguntas:

- ¿Una función cuadrática tendrá siempre dos raíces?
- ¿El gráfico de la función cuadrática será siempre una parábola cóncava (con las ramas hacia arriba), como se muestra en el gráfico?

Para contestar estas preguntas, ingresen al siguiente link, que les será de gran ayuda para profundizar este tema.

E. CARACTERÍSTICAS DE LA FUNCION CUADRATICA:

Una función de la forma:

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

con a , b y c pertenecientes a los reales y $a \neq 0$, es una función cuadrática y su gráfico es una curva llamada parábola. En la ecuación cuadrática sus términos se

Diagrama de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con las siguientes etiquetas:

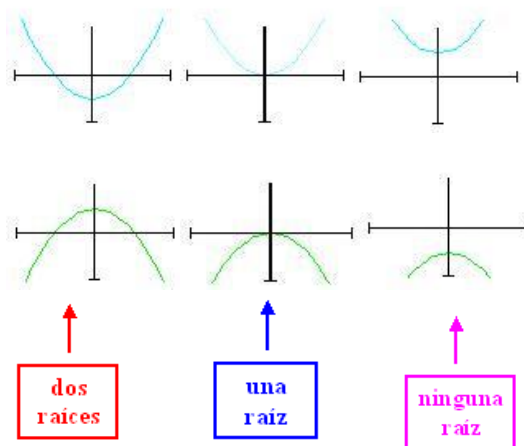
- Término cuadrático:** ax^2 (indicado con una flecha roja)
- Término lineal:** bx (indicado con una flecha verde)
- Término independiente:** c (indicado con una flecha azul)

llaman:

si la ecuación tiene todos los términos se dice ecuación completa, si a la función le falta el término lineal o independiente se dice que la ecuación es incompleta. Estas curvas tienen ciertos elementos que la identifican como veremos en el siguiente gráfico:

Raíces

Las **raíces** (o ceros) de la función cuadrática son aquellos valores de x para los cuales la expresión vale 0, es decir los valores de x tales que $y = 0$. Gráficamente corresponden a las abscisas de los puntos donde la parábola corta al eje x . Podemos ver a continuación que existen parábolas que cortan al eje x en:



Prueba con el simulador anterior como varían las raíces de la función cambiando los valores de los términos

Para poder calcular las raíces de cualquier función cuadrática calculamos $f(x) = 0$, entonces: $ax^2 + bx + c = 0$. Pero para resolver $ax^2 + bx + c = 0$ observamos que no podemos aplicar las propiedades de las ecuaciones, ésta tiene la particularidad de poseer un término de segundo grado, otro de primer grado y un término constante. Entonces, para resolverla podemos hacer uso de la fórmula: al resultado de la cuenta $b^2 - 4ac$ se lo llama **discriminante de la ecuación**, esta operación presenta distintas posibilidades:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$



¿Cómo se obtiene?

- Si $b^2 - 4ac > 0$ tenemos dos soluciones posibles.
- Si $b^2 - 4ac = 0$ el resultado de la raíz será 0, la ecuación tiene una sola solución real.
- Si $b^2 - 4ac < 0$ la raíz no puede resolverse, la ecuación no tendrá solución real.

Entonces, si la ecuación está completa ya sabemos como calcular las raíces (con la fórmula) y si la ecuación es incompleta solo basta despejar la variable x de la ecuación:

$$1^{\text{er}} \text{ caso: } ax^2 + bx = 0$$

$$2^{\text{do}} \text{ caso: } ax^2 + c = 0$$

Simetría: La parábola presenta simetría respecto a una cierta recta vertical. Es decir, si conocemos dos puntos del gráfico (x_1, p) y (x_2, p) , el eje de simetría pasará por el punto medio entre estos, o sea

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Vértice: El vértice de la parábola está ubicado sobre la recta de simetría, de modo que su coordenada x , que notaremos x_v vale:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Conocida la coordenada x de un punto, su correspondiente coordenada y se calcula reemplazando el valor de x en la expresión de la función. En el vértice se calcula el máximo (o el mínimo) valor de la función de acuerdo a que la parábola tenga sus ramas para abajo o para arriba (*lo veremos a continuación*).

Si la parábola no tiene raíces el vértice se puede calcular utilizando los coeficientes de la función de la siguiente manera:

$$x_v = \frac{-b}{2a}$$

Concavidad: Otra característica es si la parábola es cóncava o convexa:

En el siguiente simulador cambia los valores de a , dándole valores positivos y valores negativos.

También suele decirse que:

- Si $a > 0$ la parábola es cóncava o con ramas hacia arriba.
- Si $a < 0$ la parábola es convexa o con ramas hacia abajo.

F. ACTIVIDADES:

1. ¿Cuáles de las siguientes son funciones cuadráticas?

a) $f(x) = 2(x - 3)^2 - 5(2x + 3) + 8x(3 - 2x)$

c) $h(x) = 6x - 3x(x+5) - 2(x - 1)(3 - x) + 6$

b) $g(x) = 4x^2 - 3(x - 6) - (2x - 3)^2 + 5x - 8$

d) $t(x) = 2(x-1)^2 - 2x(x + 2) + 5$

Utilizando el programa Geogebra, instalado en sus equipos portátiles, grafiquen las funciones cuadráticas encontradas. Luego señalen las raíces, el vértice y su eje de simetría.

2. Grafiquen las siguientes funciones cuadráticas:

a) $f(x) = x^2 - 2x - 1$

b) $f(x) = x^2 + 2x + 1$

c) $f(x) = x^2 - 2x + 2$

A partir de los gráficos realizados anteriormente, contesten:

- ¿Existe diferencia entre los gráficos? Justifique. ¿Cuántas raíces tiene cada función?
- ¿Se puede encontrar el vértice sobre la recta x en alguna de las funciones?
- ¿Alguna de las funciones no corta en el eje x ? Indiquen cuánto valen sus raíces.

3. Utilizando el programa Geogebra, grafiquen las siguientes funciones:

a) $f(x) = -3x^2 + 2x + 1$

b) $g(x) = 1/2 x^2 + 3x - 1$

Una vez graficadas, determinen gráfica y analíticamente los siguientes elementos: raíces de la función, el vértice, el eje de simetría y la ordenada al origen de las funciones.

- ¿Cuál es el punto de intersección entre las funciones? ¿Cómo podrían calcularlo analíticamente?
- Hallen la expresión de la función cuadrática que cumpla con los siguientes requisitos:
 - Su gráfico pasa por el punto $(3, -1)$ y su vértice es el punto $V = (-2, 3)$