GUIA N°8

Escuela: Colegio Provincial Barrio Parque Rivadavia Norte

Docente: Ing. Civil BONDUEL, Ana Sofia

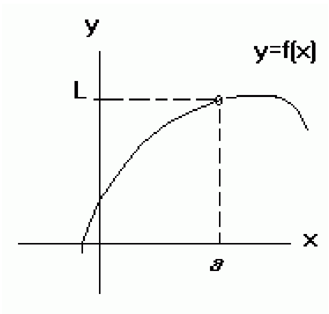
Curso: 6° año

Área: Matemática Aplicada.

Contenido:Noción de límite. límites laterales. Cálculo de límites en un punto. Límites infinitos e indeterminados. Continuidad. Concepto

Noción de límite de una función en un punto.

Una función y = f(x) puede no estar definida para un cierto punto, digamos x = xo , como sucede con y = log x en el punto x = 0, o como sucede con y = tg x en el punto x = p/2 . En realidad, una función y = f(x) puede llegar a mostrar un comportamiento extraño en cierto punto x = xo . Para comprender mejor estas posibles anomalías de algunas funciones se introduce la noción de límite de una función en un punto.



La función $y = f(x)$ tiene como límite L en el punto x=a.

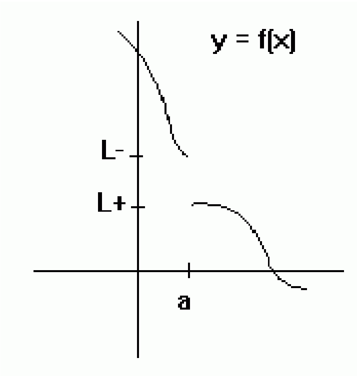
Para determinar el límite de *y* = *f(x)* en cierto punto *x* = a , debemos prescindir del valor que tenga *f*(a), incluso puede que *f*(a) ni siquiera esté definido, y fijarnos en los valores de *f*(a) para puntos extremadamente cercanos a *x* = a.

En el ejemplo del gráfico, observando los valores de los puntos muy próximos a *x*= a*,* lo cual será expresado así: $x \to a$, se llega a la conclusión que el límite de *y* = *f(x)* "cuando x tiende al valor *a*" es L. Utilizando simbología matemática, lo expresamos:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

Limites laterales.

Existen funciones que en un cierto punto *x* = *x*o poseen una *discontinuidad*, sufriendo su gráfica de un "*salto*", tal como se muestra en la figura de abajo.



La función *y* = *f(x)* tiene como límite L+ por la derecha del punto *x*=a, y el límite L- por la izquierda del punto *x*=a.

Para la función *y* = *f(x)* del gráfico de arriba, no está definido el valor *f*(a*)* , y se dice que el límite de *f(x)* "por la derecha" del punto *x* = a (expresado así: $x \to a$ +e) es L+, lo cual en simbología matemática es:

$$\lim_{x \to a+\varepsilon} f(x) = L_{+}$$

Por otra parte, se dice que el límite de *f(x)* "por la izquierda" del punto *x* = a (expresado así: $x \to a$ -e) es L+, que en simbología matemática es:

$$\lim_{x \to a-\varepsilon} f(x) = L_{-}$$

(NOTA: En Cálculo Infinitesimal suelen emplearse letras griegas tales como: e, d, ... para referirnos a valores numéricos muy pequeños.)

Por otra parte, para que podamos hablar verdaderamente del límite de *f(x)* en el punto *x = a* los los límites laterales deben ser iguales, es decir, debe cumplirse:

$$\lim_{x \to a+} f(x) = \lim_{x \to a-} f(x)$$

Limites infinitos

Hay dos casos destacables de límites, tal como podemos verlo en las gráficas de abajo

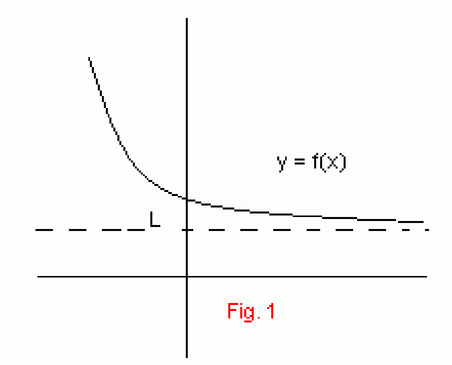


Fig. 1

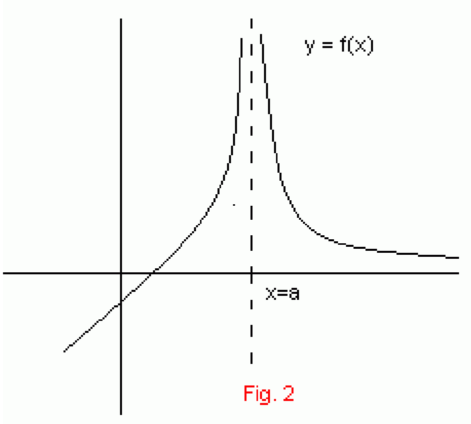


Fig. 2

Para la función *y* = *f(x)* de la Fig. 1, *f*(x) tiende al valor L para *x* en el infinito (geométricamente se habla de que *y* = L es una "asíntota horizontal" de la curva). En el caso de la Fig. 2, es la función *y* = *f(x)* la que toma un valor infinito en el punto *x*=a (geométricamente *x*=a es una "asíntota vertical" de la curva).

En el primer caso se expresa:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

Mientras que el segundo así:

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$$

Algunas propiedades sobre el infinito y valores *indeterminados*

Cuando se opera con límites de funciones se trabaja con el conjunto R ampliado, es decir, el conjunto de los números reales al que se le han añadido los entes numéricos: $+\infty$, $-\infty$. Conviene, por tanto, tener claras algunas propiedades de estos entes, así como

- Para cualquier número *n* (incluido el 0): $n/\infty = 0$.
- Para cualquier número *n positivo* (distinto de 0): $n \cdot +\infty = +\infty$, $n \cdot (-\infty) = -\infty$.
- * Para cualquier número *n negativo* (distinto de 0): $n \cdot +\infty = -\infty$, $n \cdot (-\infty) = +\infty$.
- * Para el caso del 0: $0 \cdot +\infty$ y $0 \cdot (-\infty)$ son Indeterminados.
- Para números *n* positivos $+\infty/n = +\infty$, pero para *n* negativos $+\infty/n = -\infty$.
- * Para el caso del 0: $+\infty/0 = \infty$, así como $-\infty/0 = \infty$, pero en ambos casos el signo del infinito es Indeterminado . Algo similar sucede cuando dividimos un número entre cero: $3/0 = \infty$, $-3/0 = \infty$ (el signo del infinito es indeterminado, aunque sí podemos asegurar lo que sucede tanto *a la derecha* de 0, como *a la izquierda* de 0).

- Asimismo son Indeterminados:
  ∞/∞ (con cualquier signo), $\infty - \infty$, 0/0 , 0° , ∞° (cualq. signo).

La mayoría de estas relaciones son muy lógicas si nos acostumbramos a imaginar a $+\infty$, como 1/(+0), y a $-\infty$, como -1/(+0) -entendiendo por +0 un número positivo muy pequeño-.

Cálculo de límites.

Sea una función *y = f(x)* , si queremos hallar el límite de esa función en un determinado punto *x = a*, lo primero que haremos será hallar *f(a),* ante lo cual pueden suceder tres casos.

I) *f(a)* tiene un valor claro y unívoco.
II) No podemos hallar *f(a)* , bien porque *f(x)* no tiene imagen en el punto *x = a*, o porque nos da un valor *indeterminado*.
III) *f(a)* nos da un valor infinito.

Para el primer caso, podemos decir que ese mismo valor de *f*(*a*) es el propio valor del límite. Esto sucede en las regiones continuas de *y = f(x)* . Por ejemplo:

Ejemplo 1: Hallar el límite en el punto *x* = 2 de la función $y = x^2 + 1$.

$$\lim_{x\to 2}(x^2+1) \quad \to \quad 2^2+1$$

Este límite es 5, puesto que de una manera clara tenemos *f(*2*)* = 5.

Ejemplo 2: Hallar el límite en el punto *x* = 1 de la función :

$$y = \frac{x^2+2x-3}{x-1}$$

Para este caso, si hallamos el valor de la función en *x* = 1 obtenemos *f*(1) = 0/0, que es uno de los casos de *indeterminación*, l<u>o cual no significa que es imposible hallar el límite de *f*(x) en ese punto</u>, sino que debemos "operar" para eliminar la indeterminación (por lo general toda indeterminación puede ser determinada). Por ejemplo podemos descomponer en factores el numerador de la fracción:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x+3)\,(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}\,(x+3) = 4$$

Al cancelar el factor (*x* -1) en el numerador y denominador hemos conseguido eliminar la indeterminación. Numerosas indeterminaciones nos aparecen cuando hallamos límites en el infinito, como en los próximos ejemplos.

Ejemplo 3: Hallar el siguiente límite en el infinito:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})$$

En principio si sustituimos *x* por $+\infty$, nos encontramos con la indeterminación $\infty - \infty$, en estos casos suele funcionar multiplicar y dividir por la misma expresión pero con el signo positivo, es decir:

$$\lim_{x\to\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) = \lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}).(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} =$$

$$= \frac{(x+1)-(x-1)}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{+\infty} = 0$$

Ejemplo 4: Hallar el siguiente límite en el infinito:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^3 - 11x}$$

Si sustituimos *x* por $+\infty$, nos encontramos con la indeterminación ∞ / ∞. Para estos casos de cocientes de polinomios en el infinito, se sigue la regla: " Dividir numerador y denominador por la potencia máxima del denominador", que en nuestro caso es x^3:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{6x^3 - 5x^2 + 3x}{2x^3 - 11x} \times \frac{1/x^3}{1/x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6\frac{x^3}{x^3} - 5\frac{x^2}{x^3} + 3\frac{x}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3} - 11\frac{x}{x^3}} =$$

$$= \frac{6 - 5.0 + 3.0}{2 - 11.0} = \frac{6}{2} = 3$$

teniendo en cuenta que las potencias $1/x$, $1/x^2$, etc. son 0.

Ejercicios

$a)\ \lim_{x\to -2} \dfrac{3x}{3x+6}$ $\qquad b)\ \lim_{x\to -\infty} \dfrac{2x+3}{2x-1}$

$c)\ \lim_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$ $\qquad d)\ \lim_{x\to 9} \dfrac{\sqrt{x}-3}{9-x}$

$e)\ \lim_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^3-2^3}{h}$ $\qquad f)\ \lim_{x\to 0} \dfrac{1+10^{-1/x}}{2-10^{-1/x}}$

$g)\ \lim_{x\to 3} 10^{-1/(x-3)}$ $\qquad h)\ \lim_{x\to -\infty} \left(\dfrac{3x}{x-1}-\dfrac{2x}{x+1}\right)$

$i)\ \lim_{x\to 3+} \dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{x-3}}$ $\qquad j)\ \lim_{x\to 0-} \left(1-e^{1/x}\right)$

Soluciones:

a) $-\infty$ (dch.), $+\infty$ (izq.) . b) 1 . c) 4. d) 6. e) 12. f) 1/2 (dch.), -1 (izq.) . g) 0 (dch.), $+\infty$ (izq.) . h) 1. i) 0 . j) 1.