

Escuela Técnica Obrero Argentino

Guía N°10

Docentes: Correa Claudia Noelia

Rodríguez Rolando

Sexto Año

1° Y 2° División

Ciclo: Orientado

Turno: Mañana y Tarde

Área Curricular: MATEMÁTICA

Educación Secundaria Técnica y Formación Profesional

TÍTULO: DERIVADA

CONTENIDO SELECCIONADO: DERIVADAS: Cálculo de derivadas por definición. Reglas de derivación: de una función constante y de una función polinómica.

FORMA DE TRABAJO

Toda la guía se resuelve en el cuaderno y se copian los resultados en el Práctico del final y se envía a:

*6^{to} 2^{da}: CLAUDIACORREA2439@gmail.com y

*6^{to} 1^{era}: consultastrabajopracticos@gmail.com



DERIVADA DE UNA FUNCIÓN

Recordemos la definición de derivada en un punto

Dada la función “f(x)” si que remos determinar la derivada de la función “f” en el punto “a” definimos:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Ejemplo 1: Determinar: $f'(2)$ de la función: $f(x) = 2x - 1$ la fórmula es:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$\text{entonces: } f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$$

1^{ero}) Determino $f(2)$ con la función: $f(x) = 2x - 1$ reemplazo x por 2

$$* f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$$

Determino $f(2+h)$ con la función: $f(x) = 2x - 1$ reemplazo x por $2+h$

$$* f(2+h) = 2 \cdot (2+h) - 1 = 4 + 2h - 1 = 3 + 2h$$

2^{do}) Resto: $f(2+h) - f(2) = 3 + 2h - 3 = 2h$

3^{ero}) Reemplazo en la fórmula $f'(2) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2 = 2$ por

lo tanto $f'(2) = 2$

Ejemplo 2: Determinar: $f'(1)$ de la función: $f(x) = 3x$ la fórmula es:

$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ entonces: $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$

1^{ero}) Determino $f(1)$ con la función: $f(x) = 3x$ reemplazo x por 1

$$f(1) = 3 \cdot 1 = 3$$

Determino $f(1+h)$ con la función: $f(x) = 3x$ reemplazo x por $1+h$

$$f(1+h) = 3 \cdot (1+h) = 3 + 3h$$

2^{do}) Resto: $f(1+h) - f(1) = 3 + 3h - 3 = 3h$

3^{ero}) Reemplazo en la fórmula $f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 = 3$ por

lo tanto $f'(1) = 3$

Recordemos que la **derivada de una función en un punto** es “la pendiente de la recta tangente de esa función en ese punto”; y además nos es útil para determinar la **velocidad instantánea** de un cierto móvil que se desplaza en una trayectoria que sigue la función $v(t) = -\frac{1}{2} \cdot t^2$ en un instante $t = x_0$ de tiempo.

Por ejemplo: Un cuerpo desciende por un plano inclinado. El desplazamiento en metros viene dado por la fórmula $d(t) = 1,5 t^2$ (t en segundos). Calcula la **velocidad instantánea** para $t = 1$ segundos.

Para poder determinar la **velocidad instantánea para $t = 1$ segundo**, determinamos la **derivada de la función $d(t) = 1,5 t^2$** en el punto $t = 1$.

Para familiarizarnos con las variables llamaremos a la función con $f(x)$ no $d(t)$ y a la variable t con x por lo que deberíamos averiguar $f'(1)$ de la función: $f(x) = 1,5 \cdot t^2$

Definición de derivada de una función en un punto:

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Aplicamos la definición para determinar $f'(1)$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \quad (1)$$

1) Calculamos $f(1)$ sabemos que $f(x) = 1,5 \cdot x^2$ esto es lo mismo que $f(1)$ entonces:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1,5 \cdot 1^2 \\ &= 1,5 \cdot 1 = 1,5 \end{aligned}$$

2) Calculamos $f(1+h) = f(1+h) = 1,5 \cdot (1+h)^2$

$$\begin{aligned} &= 1,5 \cdot (1^2 + 2 \cdot 1 \cdot h + h^2) \\ &= 1,5 \cdot (1 + 2h + h^2) \\ &= 1,5 + 3h + 1,5h^2 \end{aligned}$$

3) Reemplazamos el primer y el segundo paso en la fórmula

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{1,5} + 3h + 1,5h^2 - \cancel{1,5}}{h}$$

$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{+3h + 1,5h^2}{h}$$

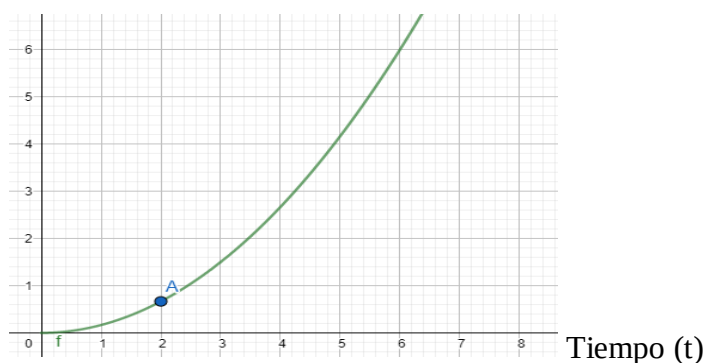
$$f'(1) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{h}(3 + 1,5h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \rightarrow 0} 3 + 1,5h = 3 \text{ por lo tanto}$$

Respuesta: La velocidad en el instante $t=1$ del cuerpo que desciende con una trayectoria de $d(t) = 1,5t^2$ en el segundo: $t = 1$. Es de **3 m/s (es de 3 metros por segundo)**

Actividad N°1: Determina la **velocidad instantánea** de una pelota de tenis, que viaja con una trayectoria de: $h(t) = 1/6 t^2$ (siendo t el tiempo en segundos y h la altura en metros) en el instante $t = 2$

Veamos su gráfica; considerando el tiempo como una variable positiva:

Altura: (h)



Ayuda: Considera la función $h(t)$ como $f(x)$ y a la variable t como la variable x ; es decir: Determina la velocidad instantánea de una pelota de tenis, que viaja a una velocidad de $f(x) = 1/6 x^2$ (siendo x el tiempo y f la altura) en el instante $x = 2$.

Hasta ahora hemos calculado la derivada de una función en un punto a perteneciente a un cierto intervalo (b, c) .

Si x es un punto cualquiera de (b, c) y h es un incremento positivo negativo suficientemente pequeño de manera tal que $x + h$ pertenezca al intervalo (b, c) , llamamos derivada de f a:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1) \quad \text{Mirar el video: } \underline{\text{https://youtu.be/a0R0iohHRRE}}$$

Observación: Observamos que, si f tiene derivada en cada punto x , es decir que si el límite existe se obtiene a partir de f una nueva función que hace corresponder a cada valor de x la derivada de $f(x)$. Esta función así definida se designa por : $f'(x)$

Por ejemplo: Obtener la derivada de la función: $f(x) = x^2$

Mirar: <https://youtu.be/uLDg8fqsuZg>

$$\begin{aligned} \text{Por la definición: } f'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \quad (1) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2xh + h^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x+h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x + h = 2x + 0 = 2x \end{aligned}$$

Si $f(x) = x^2$ entonces: $f'(x) = 2x$

De esta forma hemos deducido que la derivada de la función $f(x) = x^2$

Es $f'(x) = 2x^1$.

Actividad N°2: Determinar la derivada, aplicando la definición, de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3 \cdot x$ <https://youtu.be/U7onW7mMzLM> (mirar el video para realizarlo)

b) $f(x) = x$

c) $f(x) = 5 \cdot x^2$

d) $f(x) = x^3$ <https://youtu.be/4EEhqEfRhvo> (mirar el video para realizarlo)

e) $f(x) = x^2 + 2x$ <https://youtu.be/BbLElOQXPIM> (mirar el video para realizarlo)

A partir de la definición de derivada es posible calcular siempre que exista la derivada de cualquier función. En la tabla siguiente aparecen algunas derivadas elementales. A partir de estas y utilizando la regla de derivación, es posible calcular otras derivadas sin necesidad de recurrir a la definición.

Derivada de una función: Reglas de derivación

Regla N°1: Si la función es una función constante su derivada es 0

Mirar: <https://youtu.be/T42-57sojsA>

$$f(x) = c \quad f'(x) = 0$$

Ejemplo: 1) $f(x) = 4$ entonces $f'(x) = 0$

2) $f(x) = 5$ entonces $f'(x) = 0$

3) $f(x) = 1/2$ entonces $f'(x) = 0$

Regla N°2: Si la función es una función polinómica su derivada es bajo el exponente por la base como está elevada a la resta del exponente menos 1

Mirar: <https://youtu.be/VDumjbBAstg>

$$f(x) = x^n \quad n \neq -1 \quad f'(x) = n x^{n-1}$$

Ejemplo: 1) $f(x) = x^4$ entonces $f'(x) = 4 x^{4-1}$
 $= 4 \cdot x^3$

2) $f(x) = x^5$ entonces $f'(x) = 5 \cdot x^4$

3) $f(x) = x^{1/2}$ entonces $f'(x) = 1/2 \cdot x^{1/2-1}$
 $= 1/2 \cdot x^{-1/2}$

Regla N°3: Si la función es una función polinómica su derivada es bajo el exponente por la base como está elevada a la resta del exponente menos 1

$$f(x) = x^a, a \neq -1 \quad x > 0 \quad f'(x) = a x^{a-1}$$

Ejemplo: 1) $f(x) = x^{0,4}$ entonces $f'(x) = 0,4 x^{0,4-1}$
 $= 0,4 \cdot x^{-0,6}$

2) $f(x) = x^{\sqrt[2]{5}}$ entonces $f'(x) = \sqrt[2]{5} \cdot x^{\sqrt[2]{5}-1}$

Actividad N°3 Haciendo uso de las tablas de derivación anteriormente dadas, derivar:

$f(x)$	$f'(x)$
a) $f(x) = \sqrt{6}$	
b) $f(x) = \pi$	
c) $f(x) = x^{0,78}$	
d) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	
e) $f(x) = x^{90}$	
f) $f(x) = x^1$	
g) $f(x) = \sqrt[2]{x^3}$ primero debes pasar esta raíz a potencia así: https://youtu.be/9xwJLjHhQ2g ; luego derivo $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$	
h) $f(x) = \sqrt[5]{x^{-1}}$ primero debes pasar a potencia y luego derivar	

Práctico de La Guía N° 10.

Escuela: ETOA

Curso:.....

Apellido:.....

Nombre:.....

Actividad N°1: Determina la **velocidad instantánea** de una pelota de tenis, que viaja con una trayectoria de: $h(t) = \frac{1}{6} t^2$ (siendo t el tiempo en segundos y h la altura en metros) en el instante $t = 2$

Respuesta: Su velocidad es: m/s

Actividad N°2: Determinar la derivada, aplicando la definición, de las siguientes funciones:

Función	Derivada
a) $f(x) = 3 \cdot x$	
b) $f(x) = x$	
c) $f(x) = 2 \cdot x^2$	
d) $f(x) = x^3$	
e) $f(x) = x^2 + 2x$	

Actividad N°3 Haciendo uso de las tablas de derivación anteriormente dadas, derivar:

$f(x)$	$f'(x)$
a) $f(x) = \sqrt{6}$	
b) $f(x) = \pi$	
c) $f(x) = x^{0,78}$	
d) $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$	
e) $f(x) = x^{90}$	
f) $f(x) = x^1$	
g) $f(x) = \sqrt[2]{x^3}$	
h) $f(x) = \sqrt[5]{x^{-1}}$	

Director: Jorge Grosso.