Escuela: Bachillerato José Manuel Estrada

Docente: Gremoliche Patricia

Área Curricular: Matemática

Título de la propuesta: polinomios. Operaciones con polinomios. Ruffini.

Definición de Monomios

Un monomio es una expresión algebraica en la que las únicas operaciones que aparecen entre las variables son el producto de un número, llamado coeficiente y la letra elevada a un exponente que es un número natural.

Definición de Polinomios: es la suma algebraica de varios monomios.

Un polinomio es una expresión algebraica de la forma:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \ldots + a_1 x^1 + a_0$$

Siendo $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ números, llamados coeficientes, n un número natural, x la variable o indeterminada y a_0 el término independiente.

<u>Grado de un polinomio:</u> el grado de un polinomio $P(x)$ es el mayor exponente al que se encuentra elevada la variable x.

<u>Coeficiente principal:</u> es el número que multiplica (acompaña) a la letra de mayor exponente.

<u>Término independiente:</u> el el número que está solo o sea no lo acompaña ninguna letra.

<u>Polinomio incompleto:</u> es aquel polinomio que no tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$$

<u>Polinomio completo:</u> es aquel que tiene todos los términos desde el término independiente hasta el término de mayor grado.

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 + 5x - 3$$

<u>Polinomio ordenado:</u> un polinomio está ordenado si los monomios que lo forman están escritos de mayor a menor grado.

$$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$$

<u>Polinomios iguales:</u> dos polinomios son iguales si se verifica: los dos polinomios tienen el mismo grado y los coeficientes de los términos del mismo grado son iguales.

$P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ es igual a $Q(x) = 5x - 3 + 2x^3$

<u>Valor numérico de un polinomio:</u> es el resultado que obtenemos al sustituir la variable x por un número cualquiera y realizamos las operaciones indicadas, o sea resolvemos.

Calcular el valor numérico del polinomio $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$, para $x = -1, x = 0$.

$$P(-1) = 2(-1)^3 + 5(-1) - 3 = 2(-1) - 5 - 3 = -2 - 5 - 3 = -10$$

$$P(0) = 2(0)^3 + 5(0) - 3 = -3$$

Operaciones con polinomios

<u>Suma de polinomios</u>: para realizar la suma de dos o más polinomios, se debe sumar los coeficientes de los términos cuya parte literal sean iguales, es decir, las variables y exponentes (o grados) deben ser los mismos en los términos a sumar.

Método 1 para sumar polinomios

Pasos: **1** Ordenar los polinomios del término de mayor grado al de menor. **2** Agrupar los monomios del mismo grado. **3** Sumar los monomios semejantes.

Ejemplo del primer método para sumar polinomios

Sumar los polinomios $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$, $Q(x) = 4x - 3x^2 + 2x^3$.

1Ordenamos los polinomios, si no lo están. $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$ $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$

2Agrupamos los monomios del mismo grado.

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) + (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

$P(x) + Q(x) = (2x^3 + 2x^3) + (- 3x^2) + (5x + 4x) + (- 3)$

3Sumamos los monomios semejantes: $P(x) + Q(x)$ **$= 4x^3 - 3x^2 + 9x - 3$**

Método 2 para sumar polinomios: también podemos sumar polinomios escribiendo uno debajo del otro, de forma que los monomios semejantes queden en columnas y se puedan sumar.

Ejemplo del segundo método para sumar polinomios

Sumar los polinomios $P(x) = 7x^4 + 4x^2 + 7x + 2$, $Q(x) = 6x^3 + 8x + 3$.

1Acomodar en columnas a los términos de mayor a menor grado, y sumar.

$$\begin{array}{rrrrrr} & 7x^4 & & +4x^2 & +7x & +2 \\ + & & 6x^3 & & +8x & +3 \\ \hline & 7x^4 & +6x^3 & +4x^2 & +15x & +5 \end{array}$$

Así: $P(x) + Q(x) = 7x^4 + 6x^3 + 4x^2 + 15x + 5$

Resta de polinomios: la resta de polinomios consiste en sumar al minuendo el opuesto del sustraendo. El polinomio opuesto se obtiene cambiando todos los signos al polinomio dado, de todos los términos se le tiene que cambiar los signos.

Ejemplo de resta de polinomios

1Restar los polinomios $P(x) = 2x^3 + 5x - 3$, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$.

$P(x) - Q(x) = (2x^3 + 5x - 3) - (2x^3 - 3x^2 + 4x)$

2Obtenemos el opuesto al sustraendo de $Q(x)= - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

$P(x) - Q(x) = P(x) + (- Q(x)) = 2x^3 + 5x - 3 - 2x^3 + 3x^2 - 4x$

3 Se resuelve por cualquiera de los métodos vistos para la suma. (Realizarla y verificar)

4Resultado de la resta: $P(x) - Q(x) = 3x^2 + x - 3$

Multiplicación de polinomios

1. Multiplicación de un número por un polinomio: la multiplicación de un número por un polinomio es, otro polinomio. El polinomio que se obtiene tiene el mismo grado del polinomio inicial. Los coeficientes del polinomio que resulta, son el producto de los coeficientes del polinomio inicial, por el número y dejando las mismas partes literales.

Ejemplos: $3 \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x - 2) = 6x^3 - 9x^2 + 12x - 6$, $2(3x^3 + 4x^2 + 2x - 1) = 6x^3 + 8x^2 + 4x - 2$

2. Multiplicación de polinomios: este tipo de operaciones se puede llevar a cabo de dos formas distintas.

Método 1 para multiplicar polinomios

Pasos: **1** Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio. **2** Se suman los monomios del mismo grado, obteniendo otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican.

Ejemplo:

Multiplicar los siguientes polinomios $P(x) = 2x^2 - 3$, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$.

1Se multiplica cada monomio del primer polinomio por todos los elementos del segundo polinomio. $P(x) \cdot Q(x) = (2x^2 - 3) \cdot (2x^3 - 3x^2 + 4x) = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x$

2Se suman los monomios del mismo grado. $P(x) \cdot Q(x) = 4x^5 - 6x^4 + 8x^3 - 6x^3 + 9x^2 - 12x = 4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$

3Se obtiene otro polinomio cuyo grado es la suma de los grados de los polinomios que se multiplican. Grado del polinomio = Grado de P(x) + Grado de Q(x) = 2 + 3 = **5** y el resultado sería: $P(x) \cdot Q(x) =$ **$4x^5 - 6x^4 + 2x^3 + 9x^2 - 12x$**

Método 2 para multiplicar polinomios

En cada fila se multiplica cada uno de los monomios del segundo polinomio por todos los monomios del primer polinomio. Se colocan los monomios semejantes en la misma columna y posteriormente se suman los monomios semejantes.

Ejemplo:

Multiplicar los siguientes polinomios $P(x) = 2x^2 - 3$, $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 4x$.

Como la multiplicación de polinomios cumple la propiedad conmutativa, hemos tomado como polinomio multiplicador el polinomio más sencillo.

$$
\begin{array}{rrrrrr}
 & & 2x^3 & -3x^2 & +4x & \\
\times & & & & 2x^2 & -3 \\
\hline
 & & -6x^3 & +9x^2 & -12x & \\
4x^5 & -6x^4 & +8x^3 & & & \\
\hline
4x^5 & -6x^4 & +2x^3 & +9x^2 & -12x &
\end{array}
$$

<u>División de polinomios:</u>

Paolo Ruffini (1765, 1822) fue un matemático italiano, que estableció un método breve para hacer la **división de polinomios**, cuando el **divisor es un binomio de la forma (x - a)**.

Regla de Ruffini: para explicar los pasos a aplicar en la **regla de Ruffini** vamos a tomar un ejemplo:

Dividir: $x^4 - 3x^2 + 2 \div (x - 3)$

1Si el polinomio no está completo, lo completamos añadiendo los términos que faltan con ceros. $x^4 - ox^3 - 3x^2 + ox + 2 \div (x - 3)$

2Colocamos los coeficientes del dividendo en una línea. $1 \quad 0 \quad -3 \quad 0 \quad 2$

3Abajo a la izquierda colocamos el opuesto del término independiente del divisor: $-(-3) = 3$.

$$
\begin{array}{lrrrrr}
 & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\
3 & & & & &
\end{array}
$$

4Trazamos una raya y bajamos el primer coeficiente (1).

$$\begin{array}{l|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

5Multiplicamos ese coeficiente (1) por el divisor (3) y lo colocamos debajo del siguiente término (0).

$$\begin{array}{l|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & & & & \end{array}$$

6Sumamos los dos coeficientes $(0+3)$.= 3 y lo colocamos debajo del siguiente término.

$$\begin{array}{l|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & & & \\ \hline & 1 & 3 & & & \end{array}$$

7Repetimos el proceso anterior $3 \cdot 3 = 9$ y $-3 + 9 = 6$

$$\begin{array}{l|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & & \end{array}$$

Volvemos a repetir el proceso $3 \cdot 6 = 18$ y $0 + 18 = 18$

$$\begin{array}{l|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & \end{array}$$

Volvemos a repetir $3 \cdot 18 = 54$ y $2 + 54 = 56$

$$\begin{array}{l|rrrrr} & 1 & 0 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & & 3 & 9 & 18 & 54 \\ \hline & 1 & 3 & 6 & 18 & 56 \end{array}$$

8El último número obtenido 56, es el resto.

9El cociente es un polinomio de grado inferior en una unidad al dividendo y cuyos coeficientes son los que hemos obtenido.

Cociente: $x^3 + 3x^2 + 6x + 18$ **(Nota cuando los coeficientes son 1 no hace falta colocarlo).**

Resto: 56

<u>Teorema del resto:</u> El teorema del resto nos proporciona el **resto** de la división de un polinomio P(x), entre un polinomio de la forma (x − a) es el valor numérico de dicho polinomio para el valor: x = a, es decir P(a) y obteniendo ese valor podemos comprobar si la división que realizamos está correcta y también para saber si la división es exacta o no, o sea si los polinomio que estamos dividiendo son divisibles o no.

Ejemplo: P(x) = $x^4 - 3x^2 + 2$ Q(x) = x − 3

Si calculamos P(x) : Q(x) usando la regla de Ruffini, obtenemos

	1	0	-3	0	2
3		3	9	18	54
	1	3	6	18	56

El último número (marcado con verde) indica el resto. Es 56. Ahora, al evaluar P(x) en x=a, o sea x=3 obtenemos: $P(3) = 3^4 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 81 - 27 + 2 =$ **56**

Notamos que también obtuvimos 56, lo que concuerda con el resultado de la regla de Ruffini

Por tanto el teorema del resto nos permite conocer el resto de la división por un binomio del tipo (x − a). Basta con hallar el valor numérico de P(x) en x = a.

1 Calcular, por el teorema del resto, el resto de la división $(x^5 - 32) : (x - 2)$. Comprueba con la regla de Ruffini. **1Evaluar en x=2**

Tenemos que hallar el valor numérico del polinomio para x = 2, es decir, para el término independiente del binomio cambiado de signo. $P(2) = (2^5 - 32) = 32 - 32 = 0$

Como el resto es nulo, esto nos indica que la división es exacta.

2Comprobamos la solución efectuando la división por Ruffini.

	1	0	0	0	0	-32
2		2	4	8	16	32
	1	2	4	8	16	0