Escuela: CENS Juan de Garay.

Docente: Sánchez, Viviana Edith.

Año: 2° Divisiones: 1° y 2°

Nivel: Secundario para adultos.

Turno: Noche.

Área Curricular: Matemática.

Guía N°: **5**

Título: *Radicales. Operaciones con radicales.*

Estudiamos, en la guía anterior, como sumar o restar radicales semejantes.
Pero… ¿Pensaste qué ocurriría si no son semejantes los radicales?

¿Sería posible sumar o restar radicales **no semejantes**? 

En principio, **no se puede sumar o restar radicales que no son semejantes**, **pero…** hay algunos radicales que, a primera vista, no nos parecen semejantes y sí lo son, solo tenemos que extraer factores.

Por lo tanto, existen casos en los cuales ciertos radicales son semejantes luego de llevarlos a su **mínima expresión**. Veamos algunos ejemplos:

Para trabajar los siguientes ejemplos necesitarás recordar cómo descomponer un número como producto de factores primos.

Por ejemplo:

60	3
20	2
10	5
2	2
1	

$$60 = 2 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 5 = 2^2 \,.\, 3 \,.\, 5$$

✓ $5\sqrt{20}+4\sqrt{45}-\sqrt{5}=5\sqrt{2^2\cdot 5}+4\sqrt{3^2\cdot 5}-\sqrt{5}$

Descomponemos los radicandos como producto de factores primos. (Los factorizamos)

$=5\cdot\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{5}+4\cdot\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}$

Aplicamos propiedad: "**Distributividad de la radicación respecto de la multiplicación**".

$=5\cdot 2\cdot\sqrt{5}+4\cdot 3\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}$

Aplicamos propiedad: "**Simplificación del índice**".

$=10\cdot\sqrt{5}+12\cdot\sqrt{5}-\sqrt{5}$

Radicales semejantes.

$=(10+12-1)\cdot\sqrt{5}$

$=\mathbf{21\sqrt{5}}$

✓ $\sqrt{28}+\sqrt{63}-\sqrt[3]{7}=\sqrt{2^2\cdot 7}+\sqrt{3^2\cdot 7}-\sqrt[3]{7}$

Descomponemos los radicandos como producto de factores primos. (Los factorizamos)

$=\sqrt{2^2}\cdot\sqrt{7}+\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}$

Aplicamos propiedad: "**Distributividad de la radicación respecto de la multiplicación**".

$=2\cdot\sqrt{7}+3\cdot\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}$

Aplicamos propiedad: "**Simplificación del índice**".

Sólo dos son semejantes, por lo tanto <u>sólo esos dos se podrán sumar</u>.
Y el resto se deja indicado.

$=(2+3)\cdot\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}$

$=\mathbf{5\sqrt{7}-\sqrt[3]{7}}$

⚠ Recuerda que escribimos $\mathbf{5\sqrt{7}}$, en lugar de $\mathbf{5\cdot\sqrt{7}}$, pero ten presente que aunque no lo escribimos, siempre, entre un número y una raíz hay una multiplicación.

<u>Ejercicio 1</u>: Resuelve las siguientes sumas y restas de radicales

a) $5\sqrt{7}-2\sqrt{7}=$

b) $6\sqrt{3} - \sqrt{3} + 4\sqrt{3} =$

c) $-5\sqrt[6]{8} - 3\sqrt[6]{8} - \sqrt[6]{8} =$

d) $-5\sqrt[7]{4} - 3\sqrt[7]{4} + 10\sqrt[7]{4} - 9\sqrt[7]{4} =$

e) $\sqrt{5} + \sqrt{8} - \sqrt{32} =$

f) $3\sqrt{7} - 3\sqrt{28} + \sqrt{63} =$

g) $\sqrt{54} + \sqrt{12} - \sqrt{6} =$

h) $\sqrt{20} + 3\sqrt{8} - 5\sqrt{5} =$

PRODUCTO Y COCIENTE DE RADICALES

Para efectuar cualquier multiplicación o división de radicales, estos deben tener el **mismo índice**. Luego aplicamos la inversa de la propiedad distributiva. Esto es:

En forma general: $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$ ⟵ Distributividad de la radicación respecto de la multiplicación.

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$ ⟵ Distributividad de la radicación respecto de la división.

<u>Ejemplos</u>:

✓ $\sqrt[3]{2^2} \cdot \sqrt[3]{2^5} = \sqrt[3]{2^2 \cdot 2^5}$

$= \sqrt[3]{2^{2+5}}$ ⟵ <u>Propiedad</u>: “producto de potencias de igual base”.

$= \sqrt[3]{2^7}$ ⟵ El exponente es mayor que el índice. Será necesario **extraer factores del radical**. Por lo que expresaremos a $2^7 = 2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^1$, esto es posible por “producto de potencias de igual base” para luego aplicar propiedad “simplificación del índice”.

$= \sqrt[3]{2^3 \cdot 2^3 \cdot 2^1}$

$= \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2^3} \cdot \sqrt[3]{2}$ ⟵ “Distributividad de la radicación respecto de la multiplicación”.

$= 2 \cdot 2 \cdot \sqrt[3]{2}$ ⟵ “Simplificación del índice”.

$= \mathbf{4\sqrt[3]{2}}$

✓ $$\frac{\sqrt[3]{24}}{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[3]{\frac{24}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2$$

¿Pero… qué ocurre si necesitamos multiplicar o dividir radicales que tengan distinto índice?

Pues hay que conseguir que tengan el mismo índice.

Para ello, vamos a utilizar una **propiedad** de la radicación:

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n \cdot p]{x^{m \cdot p}}\text{ , siendo } p \neq 0 \text{ y } x > 0.$$

Por esta propiedad podremos modificar el índice y exponente del radicando sin que el resultado de la raíz varíe, vamos a aprovechar esta propiedad para hallar el índice que más nos convenga.

Para conseguir que todas las raíces de un producto tengan el mismo índice hay que **reducirlas a índice común menor**, calculando el **mínimo común múltiplo** de los índices originales.

Al modificar el índice, **el exponente del radicando también se verá afectado**, para que la raíz resultante sea equivalente a la original.

Con el nuevo índice común, indirectamente ya hemos multiplicado el índice por un número, entonces, debemos saber por qué número ha sido multiplicado el índice para multiplicar el exponente del radicando por el mismo número y tener así una raíz equivalente a la original.

Ese número lo calculamos con la siguiente fórmula:

$$N° \text{ que multiplica al índice} = \frac{\text{índice común menor}}{\text{índice de la raíz original}}$$

Una vez calculado, multiplicamos el exponente del radicando por éste número.

Cuando tenemos todas las raíces con el mismo índice, ya podemos aplicar las propiedades de las raíces y seguir con la operación.

Veamos ejemplos:

- ✓ $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4} = \cdots$

Primer paso: calculamos el índice común menor, este se obtiene calculando mínimo común múltiplo de los índices de ambas raíces, esto es $\text{m.c.m.}(3,5) = \mathbf{15}$

Segundo paso: averiguamos por qué número deberemos multiplicar cada índice y exponente para obtener el índice común **15**, que es nuestro objetivo.

$\frac{15}{3} = 5$ **(Primera raíz)** $\frac{15}{5} = 3$ **(Segunda raíz)**

Tercer paso: multiplicamos índice y exponente de la primera raíz por **5** y multiplicamos índice y exponente de la segunda raíz por **3**

$\sqrt[3\cdot5]{\mathbf{2^{1\cdot5}}} = \sqrt[15]{\mathbf{2^5}}$ y $\sqrt[5\cdot3]{\mathbf{2^{4\cdot3}}} = \sqrt[15]{\mathbf{2^{12}}}$

Cuarto paso: multiplicamos las raíces equivalentes a las originales, obtenidas en el paso anterior

$\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^{12}} = \sqrt[15]{2^5 \cdot 2^{12}}$

$= \sqrt[15]{2^{5+12}}$ ← Propiedad: "producto de potencias de igual base".

$= \sqrt[15]{2^{17}}$ ← El exponente es mayor que el índice. Será necesario **extraer factores del radical**. Por lo que expresaremos a $\mathbf{2^{17} = 2^{15} \cdot 2^2}$, esto es posible por "producto de potencias de igual base" para luego aplicar propiedad "simplificación del índice".

$= \sqrt[15]{2^{15} \cdot 2^2}$

$= \sqrt[15]{2^{15}} \cdot \sqrt[15]{2^2}$ ← "Distributividad de la radicación respecto de la multiplicación".

$= \mathbf{2 \cdot \sqrt[15]{2^2}}$ ← "Simplificación del índice".

Por lo tanto, $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[5]{2^4} = \mathbf{2 \cdot \sqrt[15]{2^2}}$

✓ $\frac{\sqrt[4]{7^5}}{\sqrt[6]{7^3}} = \cdots$ Trabajamos siguiendo los mismos pasos que en el ejemplo anterior, sólo que en este caso, aplicaremos propiedad: *"cociente de potencias de igual base".*

Paso 1: calculamos el índice común menor, que es el $\mathrm{m.c.m.}\,(4, 6) = \mathbf{12}$

Paso 2: averiguamos el número, que debe multiplicar al índice y exponente de cada raíz, para obtener índice común 12.

$\frac{12}{4} = 3$ **(Primera raíz)** $\frac{12}{6} = 2$ **(Segunda raíz)**

Tercer paso: multiplicamos índice y exponente de la primera raíz por **3** y multiplicamos índice y exponente de la segunda raíz por **2**

$$\sqrt[4\cdot 3]{7^{5\cdot 3}} = \sqrt[12]{7^{15}} \quad \text{y} \quad \sqrt[6\cdot 2]{7^{3\cdot 2}} = \sqrt[12]{7^{6}}$$

Cuarto paso: dividimos las raíces equivalentes a las originales, obtenidas en el paso anterior

$$\frac{\sqrt[12]{7^{15}}}{\sqrt[12]{7^{6}}} = \sqrt[12]{\frac{7^{15}}{7^{6}}}$$

$$= \sqrt[12]{7^{15-6}} \longleftarrow$$ Propiedad: "cociente de potencias de igual base".

$$= \sqrt[12]{7^{9}}$$

En este caso, como el exponente es menor que el índice, no es necesario extraer factores del radical. Pero, si se nos presenta el caso de tener exponente mayor que el índice, deberemos extraer factores como en el ejemplo de la multiplicación.

Ejercicio 2: Resuelve las siguientes multiplicaciones y divisiones de radicales

a) $\sqrt{5}\cdot\sqrt{2} =$

b) $\dfrac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{6}} =$

c) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[5]{2} =$

d) $\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt[4]{6}} =$

e) $\sqrt{5}\cdot\sqrt[4]{5^3} =$

f) $\dfrac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt[4]{3}} =$

Criterios de evaluación:

- ✓ Correcta presentación.
- ✓ Buena ortografía, coherencia y respeto por el orden de los ejercicios.
- ✓ Buena interpretación de los conceptos.
- ✓ Desarrollo de todas las actividades propuestas.
- ✓ Esfuerzo en el trabajo.

Directora: Graciela Inés Pérez.

Profesora: Sánchez Viviana Edith.