Escuela: Bachillerato José Manuel Estrada

Docente: Gremoliche Patricia

Área Curricular: Matemática

Título de la propuesta: Números racionales, fracciones, operaciones, ejercicios combinados.

Una fracción es el cociente de dos números enteros a y b, que representamos de la siguiente forma:

$$\frac{a}{b} \qquad b \neq 0$$

b, denominador, **indica el número de partes en que se ha dividido la unidad.**

a, numerador, **indica el número de unidades fraccionarias elegidas.**

Número mixto es el que está compuesto de parte entera y fraccionaria. Para pasar de número **mixto a fracción**, se deja el **mismo denominador** y el **numerador** es la **suma del producto del entero por el denominador más el numerador**, del número mixto.

Para pasar una **fracción impropia a número mixto**, **se divide el numerador por el denominador. El cociente es el entero del número mixto y el resto el numerador de la fracción, siendo el denominador el mismo.**

Si se **multiplica o divide el numerador y denominador de una fracción por un número entero**, distinto de cero, se obtiene **otra fracción equivalente** a la dada.

Al primer caso le llamamos **ampliar o amplificar**.

$$\frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{10}{15} \qquad \frac{2}{3} = \frac{10}{15} \qquad 2 \cdot 15 = 3 \cdot 10 \quad 30 = 30$$

Al segundo caso le llamamos **simplificar**.

$$\frac{8:4}{36:4} = \frac{2}{9} \qquad \frac{8}{36} = \frac{2}{9} \qquad 8 \cdot 9 = 36 \cdot 2 \quad 72 = 72$$

Fracciones irreducibles

Las **fracciones irreducibles** son aquellas que **no** se pueden **simplificar**, esto sucede cuando el **numerador y el denominador** son **primos** entre sí.

<u>OPERACIONES CON FRACCIONES:</u>

I) Suma y resta de fracciones

Con el mismo denominador: se suman o se restan los numeradores y se mantiene el denominador.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}$$ Ejemplo $$\frac{5}{7} + \frac{1}{7} = \frac{6}{7}$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$ Ejemplo $$\frac{5}{7}-\frac{1}{7}=\frac{4}{7}$$

Con distinto denominador: en primer lugar se reducen los denominadores a común denominador, y se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas. Se determina el **denominador común**, que será el **mínimo común múltiplo de los denominadores**. **Este denominador, común, se divide por cada uno de los denominadores, multiplicándose el cociente obtenido por el numerador correspondiente. Por último** se suman o se restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$$ Ejemplo $$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{5\cdot 3+1\cdot 2}{12}=\frac{15+2}{12}=\frac{17}{12}$$

El m.c.m. de $(4,6)=12$. (Recordar como se hace el m.c.m.)

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$$ Ejemplo $$\frac{5}{4}-\frac{1}{6}=\frac{5\cdot 3-1\cdot 2}{12}=\frac{15-2}{12}=\frac{13}{12}$$

II) Multiplicación de fracciones: la multiplicación de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los numeradores y por denominador el producto de los denominadores.

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$$ Ejemplo $$\frac{5}{4}\cdot\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$$

III) Cociente de fracciones: la división de dos fracciones es otra fracción que tiene por numerador el producto de los extremos y por denominador el producto de los medios.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$$ Ejemplo $$\frac{5}{7}\div\frac{1}{6}=\frac{5}{7}\cdot\frac{6}{1}=\frac{30}{7}$$

Simplificar una **fracción** es transformarla en una **fracción equivalente** más simple.

Para **simplificar** una **fracción dividimos numerador y denominador** por un **mismo número**. Empezaremos a **simplificar** probando por los primeros **números primos**: 2, 3, 5, 7, ... Es decir, probamos a **dividir numerador y denominador** entre **2** mientras se pueda, después pasamos al **3** y así sucesivamente. Se repite el proceso hasta que no haya más divisores comunes.

IV) Potencia de fracciones: para elevar una fracción a una potencia se eleva tanto el numerador como el denominador al exponente dado.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}\qquad\left(\frac{a}{b}\right)^{-n}=\left(\frac{b}{a}\right)^n\qquad\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}=\frac{b}{a}\qquad\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{2^4}{3^4}=\frac{16}{81}$$

Propiedades

1. Toda fracción elevada a cero es igual a 1: $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

2. Toda fracción elevada a 1 es igual a la misma fracción: $\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$

3. Producto de potencias con la misma base**:** es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la suma de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m+n} \qquad \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{2+3} = \frac{2^5}{3^5} = \frac{32}{243}$$

4. División de potencias con la misma base: es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es la diferencia de los exponentes.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m : \left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m-n} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^7 : \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{7-3} = \frac{2^4}{3^4} = \frac{16}{81}$$

5. Potencia de una potencia**:** es otra potencia con la misma base y cuyo exponente es el producto de los exponentes.

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^m\right]^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{m \cdot n} \qquad \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1^6}{2^6} = \frac{1}{64}$$

6. Potencias de fracciones con exponente negativo: una potencia de una fracción con exponente negativo es igual a otra potencia cuya base es la inversa de la fracción original y con exponente positivo

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-1} = \frac{b}{a} \quad \left(\frac{2}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{2}$$

V) Raíz de fracciones: para sacar la raíz de una fracción se tiene que sacar la raíz tanto del numerador como del denominador. La raíz es la operación inversa de la potencia.

Operaciones combinadas

1º. Efectuar las operaciones entre llaves, corchetes y paréntesis.

2º. Calcular las potencias y raíces.

3º. Efectuar los productos y cocientes.

4º. Pasar a fracción los números mixtos y decimales.

5º. Realizar las sumas y restas.

Ejemplos de ejercicios con fracciones

$$\left[\left(2-1\tfrac{3}{5}\right)^2+\left(\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{4}\right)-\left(\tfrac{6}{5}\cdot\tfrac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\tfrac{1}{2}\right)^3\right]\div\left(5-\tfrac{6}{5}\right)=$$

Primero operamos con los productos y números mixtos dentro de los paréntesis.

$$\left[\left(2-\tfrac{8}{5}\right)^2+\left(\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{4}\right)-\left(\tfrac{6}{15}\right)^4\cdot\left(\tfrac{15}{2}\right)^3\right]\div\left(5-\tfrac{6}{5}\right)=$$

Luego, operamos en el primer paréntesis, quitamos el segundo, simplificamos en el tercero y operamos en el último.

$$\left[\left(\tfrac{2}{5}\right)^2+\left(\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{4}\right)-\left(\tfrac{2}{5}\right)^4\cdot\left(\tfrac{15}{2}\right)^3\right]\div\tfrac{19}{5}=$$

Realizamos el producto y lo simplificamos.

$$\left(\tfrac{4}{25}+\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{4}-\tfrac{16}{625}\cdot\tfrac{3375}{8}\right)\div\tfrac{19}{5}=$$

Cómo tenemos números muy grandes en la suma del primer paréntesis, operamos esta parte antes de seguir.

Tenemos:

$$\tfrac{16}{625}\cdot\tfrac{3375}{8}=$$

Antes de hacer la suma, simplificamos.

$$\tfrac{16\cdot3375}{625\cdot8}=\tfrac{2\cdot3375}{625}=\tfrac{2\cdot27}{5}=\tfrac{54}{5}$$

Realizamos las operaciones del paréntesis.

$$\left(\tfrac{4}{25}+\tfrac{5}{8}-\tfrac{3}{4}-\tfrac{54}{5}\right)\div\tfrac{19}{5}=$$

Buscamos el mcm de $25, 8, 4, 5$, mirando cada número:

$25 = 5\cdot5$ $\quad$ $8 = 2\cdot2\cdot2$ $\quad$ $4 = 2\cdot2$ $\quad$ $5 = 5$

Nos damos cuenta que el m.c.m. es $5\cdot5\cdot2\cdot2\cdot2=200$.

$$\left(\tfrac{32}{200}+\tfrac{125}{200}-\tfrac{150}{200}-\tfrac{2160}{200}\right)\div\tfrac{19}{5}= \quad \tfrac{32+125-150-2160}{200}\div\tfrac{19}{5}= \quad -\tfrac{2153}{200}\div\tfrac{19}{5}=$$

Hacemos las operaciones y simplificamos el resultado.

$$-\tfrac{2153}{200}\cdot\tfrac{5}{19}=-\tfrac{10765}{3800}=-\tfrac{2153}{760}$$

1) Resuelve: (el 4 está resuelto)

1) $\left(3+\frac{1}{4}\right)-\left(2+\frac{1}{6}\right)=$ $\quad$ 2) $\frac{1}{2}:\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\right)=$ $\quad$ 3) $\left(\frac{5}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{7}{2}-2\right)=$ $\quad$ 4) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=$

4) $\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=$ Realizamos las operaciones de los paréntesis, efectuamos la división de los resultados y simplificamos.

$$\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\right):\left(\frac{5}{3}+\frac{1}{6}\right)=\left(\frac{3+2}{4}\right):\left(\frac{10+1}{6}\right)=\frac{5}{4}:\frac{11}{6}=\frac{30}{44}=\frac{15}{22}$$

2) Realiza las siguientes operaciones con potencias:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$ 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$ 3) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ 4) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ 5) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}=$

6) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$ 7) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{3}=$ 8) $\left(\frac{2}{3}\right)^{2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ 9) $\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$ 10) $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}:\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}=$

11) $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}=$ 12) $\left\{\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{2}\right]^{3}\right\}^{-4}=$

3) Resuelve:

a) $\frac{2}{3}:\left[5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=$ b) $\frac{2}{3}:\left[5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=$

c) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-1\right):2\frac{1}{2}\right]=$ d) $\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^{3}\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$

e) $\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^{2}+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^{4}\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^{3}\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)=$

Ejemplo de ejercicios resueltos

a) $\frac{2}{3}:\left[5:\left(\frac{2}{4}+1\right)-3\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}\right)\right]=$

$=\frac{2}{3}:\left[5:\left(\frac{2+4}{4}\right)-3\left(\frac{2-1}{4}\right)\right]=$

$=\frac{2}{3}:\left(5:\frac{6}{4}-3\cdot\frac{1}{4}\right)=$

$=\frac{2}{3}:\left(\frac{10}{3}-\frac{3}{4}\right)=$

$\frac{2}{3}:\left(\frac{40-9}{12}\right)=\frac{2}{3}:\frac{31}{12}=\frac{24}{93}=\frac{8}{31}$

b) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{9}\right)+13\left(\frac{2}{3}-1\right)^{2}\right]:\left[\left(\frac{1}{2}-1\right):2\frac{1}{2}\right]=$

$=\left[\left(\frac{6-1}{9}\right)+13\left(\frac{2-3}{3}\right)^{2}\right]:\left[\left(\frac{1-2}{2}\right):\frac{2\cdot2+1}{2}\right]=$

$=\left[\frac{5}{9}+13\left(\frac{-1}{3}\right)^{2}\right]:\left(-\frac{1}{2}:\frac{5}{2}\right)=$

$=\left(\frac{5}{9}+13\cdot\frac{1}{9}\right):\left(-\frac{1}{2}:\frac{5}{2}\right)=$

$= \left(\frac{5}{9}+\frac{13}{9}\right):\left(-\frac{2}{10}\right)=$

$= \frac{18}{9}:\left(-\frac{1}{5}\right)=2:\left(-\frac{1}{5}\right)=-\frac{10}{1}=-10$

c) $\left(\sqrt{\frac{1}{9}}-\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 1.5-\left(0.5+2\frac{2}{3}\right)+0.5\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\sqrt{\frac{1}{9}}-\left[\left(\frac{1}{3}\right)^2:\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}\right)+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{9}:\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}-\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}\right)+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{9}:\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}-\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{8}{3}\right)}+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{9}:\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}-\left(\frac{19}{6}\right)+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\underbrace{\left[\frac{1}{9}:\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}-\frac{19}{6}+\frac{1}{2}\right]^3}+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{1}{9}:\frac{1}{4}\times\frac{3}{2}-\frac{19}{6}+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{4}{9}\times\frac{3}{2}-\frac{19}{6}+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\left[\frac{2}{3}-\frac{19}{6}+\frac{1}{2}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-\left[-\frac{12}{6}\right]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-[-2]^3+\frac{2}{3}\right)$

$= \left(\frac{1}{3}-[-2]^3+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}-[-8]+\frac{2}{3}\right)=\left(\frac{1}{3}+8+\frac{2}{3}\right)=9$

Resolver

$$\left[\left(2-1\frac{3}{5}\right)^2+\left(\frac{5}{8}-\frac{3}{4}\right)-\left(\frac{6}{5}\cdot\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(7\frac{1}{2}\right)^3\right]:\left(5-\frac{6}{5}\right)$$