

- Escuela: Agrotécnica Los Pioneros.
- Docente: Profesor Eric Strambach
- Año: 6º 1º
- Turno: Tarde
- Área Curricular: Matemática.
- Título de la propuesta: Revisión de números y propiedades.
- Contenido seleccionado: Conjuntos numéricos. Operaciones y propiedades.

Continuamos revisando y repasando temas de años anteriores.

Conjuntos Numéricos

Números naturales.

Los números naturales fueron los primeros que utilizó el ser humano para contar objetos. El conjunto de los números naturales tiene infinitos elementos y se simboliza:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

Los puntos suspensivos indican que no hay último elemento, pero sí existe primer elemento que es el número 1 y además todo número natural, llamémosle x , tiene su número natural consecutivo o siguiente, $x + 1$.

Los números naturales constituyen un conjunto **cerrado** para las operaciones de **suma** y **multiplicación** ya que, al operar con cualquiera de sus elementos, el resultado siempre será un número natural: $5 + 6 = 11$; $8 \cdot 5 = 40$.

No ocurre lo mismo, en cambio, con la **resta**; por ejemplo $8 - 3$ es un número natural, pero $3 - 8$ no es un número natural; como consecuencia de ello surgen los **números negativos**.

Números enteros

El conjunto de los números enteros, se lo designa con la letra $\mathbb{Z}$ y es una ampliación del conjunto $\mathbb{N}$. Está formado por los números naturales, sus correspondientes opuestos y el cero. Se representan por:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

Todo número natural es un número entero. Los números enteros permiten expresar cantidades negativas como un saldo deudor en una cuenta bancaria, un año de la era antes de Cristo, el número de una planta del sótano de un edificio, la representación de profundidades bajo el nivel del mar, temperaturas bajo cero, etc.

El conjunto de los números enteros es **cerrado** para la suma, la resta y el producto; sin embargo, la división de dos números a/b no siempre es un número entero. Es por ello que surge el conjunto de los números fraccionarios o racionales.

Números racionales.

Se llama **número racional** a todo número que puede representarse como el cociente de dos enteros con denominador **distinto de cero**.

Este nuevo conjunto numérico se denomina, el conjunto de los números racionales, se lo designa con la letra $\mathbb{Q}$.

Dicho conjunto está definido por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

El término «racional» alude a «ración» o «parte de un todo».

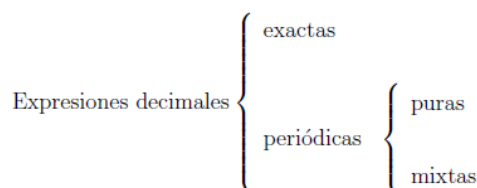
Los números racionales se pueden expresar de dos formas: mediante una fracción o por medio de un número decimal de cifras decimales finitas o periódicas (cifras decimales que se repiten). La expresión decimal es la que se obtiene al dividir el numerador por el denominador.

Veamos algunos ejemplos:

Veamos algunos ejemplos:

- $-\frac{15}{3} = -5$
- $\frac{1}{8} = 0,125$ (expresión decimal exacta)
- $\frac{3}{24} = 0,125$ (expresión decimal exacta)
- $\frac{1}{3} = 0, \widehat{3}$ (expresión decimal periódica pura)
- $\frac{223}{90} = 2,4 \widehat{7}$ (expresión decimal periódica mixta)

De acuerdo a lo anterior tenemos dos tipos de expresiones decimales, las exactas y las periódicas.



Recíprocamente, dada una expresión decimal exacto o periódico, puede encontrarse una fracción, como se describe a continuación.

- Si la expresión es exacta, se coloca como numerador el número entero que resulta de suprimir el punto decimal y como denominador la unidad seguida de tantos ceros como cifras se encontraran a la derecha del punto decimal en la expresión decimal original.

Ejemplo:

$$\blacksquare 0,7 = \frac{7}{10}$$

$$\blacksquare 0,205 = \frac{205}{1000}$$

$$\blacksquare 3,12 = \frac{312}{100}$$

- Si la expresión es periódica, se coloca como numerador el resultado de restar al número entero formado por parte entera, seguida del anteperíodo y de la primera repetición del período, el entero formado por la parte entera con el anteperíodo. Como denominador tantos nueves como cifras tenga el período seguido de tantos ceros como cifras tenga el anteperíodo.

$$\frac{(\text{todas las cifras de la expresión}) - (\text{las cifras no periódicas de la expresión})}{\text{tantos 9 como cifras dec. periódicas y tantos 0 como cifras dec. no periódicas}}$$

Ejemplo:

$$\blacksquare 8,\overline{37} = \frac{837 - 8}{99}$$

$$\blacksquare 2,3\overline{4} = \frac{234 - 23}{90}$$

$$\blacksquare 31,4\overline{72} = \frac{31472 - 314}{990}$$

Los números irracionales

Existen algunos números que tienen infinitas cifras decimales no periódicas. Estos números se llaman irracionales, pues no se pueden expresar como cociente de dos números enteros.

El conjunto de los números irracionales se simboliza con I . Son ejemplos de números irracionales:

- Las raíces de índice par de números naturales que no dan como resultado un número natural.

Por ejemplo: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt[4]{8}$, $\sqrt{6} \approx 2.449489742783178098197284074706...$

- Las raíces de índice impar de números enteros que no dan como resultado un número entero.

Por ejemplo: $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{-5}$, $\sqrt[7]{13}$.

- El número π , utilizado para calcular la longitud de la circunferencia

$$\pi \approx 3,14159265358979323846...$$

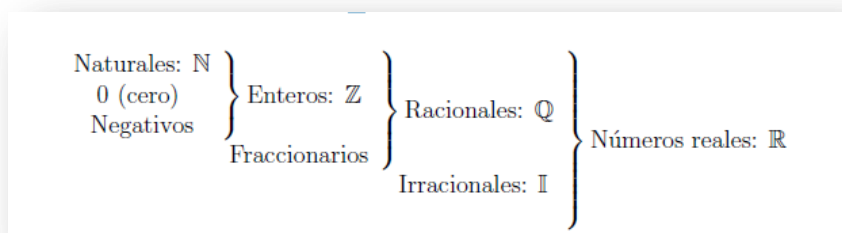
- El número e , base de los logaritmos naturales

$$e \approx 2,71828182845904523536028747135266249775724709369995...$$

Los números reales

Al conjunto formado por los números racionales y los irracionales se lo llama conjunto de los números reales y se lo simboliza con $\mathbb{R}$.

Por lo tanto $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ con "I" se indica la operación unión entre conjuntos.



- Marque con una cruz el o los conjuntos numéricos a los que pertenece cada uno de los siguientes números.

	2	$-\frac{7}{5}$	0,5	$\sqrt{3}$	0	e	$1, \overline{3}$
$\mathbb{N}$							
$\mathbb{Z}$							
$\mathbb{Q}$							
$\mathbb{I}$							
$\mathbb{R}$							

Propiedades de algunas operaciones con números reales.

❖ Radicación de números fraccionarios

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ con } b \neq 0$$

Si n es par entonces $\frac{a}{b}$ debe ser mayor o igual a cero.

Ejemplos:

$$\text{a) } \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{25}} = \frac{3}{5}$$

$$\text{b) } \sqrt[3]{-\frac{8}{27}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{27}} = -\frac{2}{3}$$

❖ Potenciación de números fraccionarios

a) De exponente natural:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}, \text{ con } b \neq 0$$

b) De exponente entero negativo:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n}, \text{ con } b \neq 0, a \neq 0$$

$$\text{En particular: } (a)^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n = \frac{1}{a^n} \text{ con } a \neq 0$$

Ejemplos:

$$\text{a) } \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$$

$$\text{b) } \left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{4^2}{3^2} = \frac{16}{9}$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{1}\right)^2 = \frac{4^2}{1^2} = \frac{16}{1} = 16$$

$$\text{d) } (-3)^{-2} = \left(\frac{-1}{3}\right)^2 = \frac{(-1)^2}{3^2} = \frac{1}{9}$$

❖ Propiedades de la potenciación:

$$a^0 = 1, \text{ con } a \neq 0$$

$$1^n = 1$$

$$\text{Potencia de un producto: } (a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p; \text{ con } p \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Potencia de un cociente: } \left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}; \text{ con } p \in \mathbb{Q}, b \neq 0$$

$$\text{Potencias de potencias: } (a^p)^q = a^{p \cdot q}; \text{ con } p \text{ y } q \in \mathbb{Q}$$

$$\text{Producto de potencias de igual base: } a^m \cdot a^p = a^{m+p}$$

$$\text{Cociente de potencias de igual base: } \frac{a^m}{a^p} = a^{m-p}; \text{ con } a \neq 0$$

❖ Propiedades de la radicación:

$$\text{Radicación de un producto: } \sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \sqrt[n]{b}$$

$$\text{Radicación de un cociente: } \sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}, \text{ con } b \neq 0$$

$$\text{Radicación como potencia de exponente fraccionario: } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Matemática

❖ Propiedad distributiva del producto respecto a la suma:

$$(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

$$a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R}$$

❖ Propiedad distributiva del cociente respecto a la suma:

$$(a+b):c = a:c + b:c \quad \text{con } a, b, c \in \mathbb{R} \quad c \neq 0$$

g) $(2^2)^3 = 2^{2 \cdot 3} = 2^6 = 64$

h) $\left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{-1} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$

Cuidado !!!

La potenciación y la radicación no son distributivas ni respecto de la suma ni respecto de la resta



Éste es un error muy frecuente entre los estudiantes del nivel medio. Por ello proponemos comparar los siguientes cálculos

SI !!!

NO !!!

Cálculos correctos	Cálculos incorrectos
$(2+3)^2 = 5^2 = 25$	$(2+3)^2 = 2^2 + 3^2 = 4 + 9 = 13$
$(7-4)^2 = 3^2 = 9$	$(7-4)^2 = 7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$
$\sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$	$\sqrt{9+16} = \sqrt{9} + \sqrt{16} = 3+4 = 7$
$\sqrt{25-16} = \sqrt{9} = 3$	$\sqrt{25-16} = \sqrt{25} - \sqrt{16} = 5-4 = 1$

Ejemplos:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{4}\right)^{5+(-3)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$

b) $z^2 \cdot z^{-1} \cdot z^{-3} \cdot z^5 = z^3$

c) $3^2 \cdot 3^{-3} \cdot 3^{-4} \cdot 3 = 3^{-4} = \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{1}{81}$

d) $b^5 : b^2 = b^{5-2} = b^3$

e) $\frac{y^6}{y^7} = y^{6-7} = y^{-1} = \frac{1}{y}$

f) $\frac{5^3}{(7-2)^3} = 5^{3-3} = 5^0 = 1$

Resolver:

a) $(x^2 \cdot y)^3 : (x \cdot y)^2 =$

b) $\left[4 \cdot \left(\frac{4}{5} - 1 + \frac{1}{5}\right)\right] - \left(\frac{5}{3} - 2\right) : \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2^{-2} =$

c) $\sqrt{2 + \left[\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}\right) : \left(2 - \frac{1}{6}\right)\right]^2} =$

d) $\frac{\sqrt{6}+2}{\sqrt{6}-2} =$

(ver en el cuaderno de 5º racionalización de denominadores)

e) $(5x - y)^2 =$

f) $(\sqrt{z})^2 - (3x)^2 =$

Directora de la Escuela Agrotécnica Los Pioneros: Profesora Margarita Ortiz