



RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Primaria-ONE 2010
Pruebas de 3° y 6° año de la Educación Primaria

ONE 2010



Ministerio de
Educación
Presidencia de la Nación

Presidenta de la Nación

Dra. Cristina Fernández de Kirchner

Jefe de Gabinete de Ministros

Dr. Juan Manuel Abal Medina

Ministro de Educación

Prof. Alberto E. Sileoni

Secretario de Educación

Lic. Jaime Perczyk

Subsecretaria de Planeamiento Educativo

Prof. Marisa del Carmen Díaz

**Dirección Nacional de Información y
Evaluación de la Calidad Educativa**

Dra. Liliana Pascual

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA

MATEMÁTICA

Educación Primaria-ONE 2010
Pruebas de 3° año y 6° año Primaria.

ONE 2010

Departamento de Evaluación de la Calidad Educativa:

Coordinación:

Mg. Mariela Leones

Elaborado por:

Prof. Andrea Novembre

Equipo del Área de Matemática:

Prof. Liliana Bronzina

Prof. Pilar Varela

Lic. Nora Burelli

Prof. Andrea Novembre

Asistencia Técnico-Pedagógica:

Prof. Natalia Rivas

Lectura Crítica:

Lic. Héctor Ponce

Agradecemos la lectura y los comentarios a los docentes:

Lic. Gladys Tedesco

Lic. Patricia Lisciardi

Este documento se terminó de elaborar en febrero del año 2012.

Diseño y Diagramación:

Karina Actis

Juan Pablo Rodríguez

Coralía Vignau

ÍNDICE

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA- EDUCACIÓN PRIMARIA -ONE 2010. PRUEBAS DE 3° AÑO Y 6° AÑO PRIMARIA	5
MATEMÁTICA.....	5
¿Cómo estuvieron constituidas las pruebas?	5
Los niveles de desempeño.....	6
Análisis de las actividades evaluadas en el ONE 2010	7
Problema de las horas de la semana.....	8
Ejemplos basados en estrategias aditivas.....	11
Ejemplos basados en estrategias multiplicativas.....	16
¿Por qué se llama prueba del 9? ¿Por qué puede dar “información falsa”?	18
Las explicaciones de los alumnos de 3° año.....	22
Problema de la granja	31
Ejemplos de resolución basados en divisiones.....	32
Ejemplos en los que se utilizan fracciones.....	33
Ejemplo: Dificultades de interpretación del enunciado.....	37
Ejemplo: Dificultades ligadas al cálculo.....	40
Ejemplo: Otras interpretaciones.....	42
Acerca de las herramientas de control	43
Problema A.....	44
Problema B	45
A modo de cierre	46
Referencias Bibliografía	47

RECOMENDACIONES METODOLÓGICAS PARA LA ENSEÑANZA- EDUCACIÓN PRIMARIA -ONE 2010. PRUEBAS DE 3° AÑO Y 6° AÑO PRIMARIA

MATEMÁTICA

Las pruebas de matemática evaluaron en el Operativo Nacional de Evaluación (ONE) 2010 una muestra de estudiantes que cursaban el 3° o 6° año de la Educación Primaria.

Las mismas tuvieron como finalidad evaluar el desempeño de los alumnos de diferentes jurisdicciones en relación con algunos contenidos y capacidades cognitivas del área.

Es importante considerar que son pruebas masivas, es decir, se aplican a muestras muy grandes de alumnos y que, por lo tanto, tienen una estructura que les es propia que difiere de la evaluación que se toma de forma habitual en las clases.

Un análisis puntual de las mismas puede complementar la información obtenida a través de las evaluaciones realizadas día a día por los docentes en su trabajo de aula.

¿Cómo estuvieron constituidas las pruebas?

Las pruebas estuvieron constituidas por 30 ítems cerrados o de opción múltiple, con cuatro opciones de respuesta cada uno, y tres ítems de respuesta abierta a desarrollar. Cada alumno debía responder las 33 preguntas.

La inclusión de ítems de respuesta abierta permitió evaluar los procesos que los alumnos desarrollaron para dar cuenta de un procedimiento o de una estrategia de resolución elegida y de su relación con la respuesta presentada.

Con el fin de atender especialmente al procedimiento de resolución y no solo al resultado, los ítems de respuesta abierta fueron corregidos por docentes debidamente capacitados. Para garantizar la objetividad en la corrección, los docentes utilizaron una guía elaborada para tal fin por el equipo pedagógico de la DiNIECE, y de esta manera, clasificaron las respuestas en cuatro categorías contempladas en una grilla de corrección: correcta, parcialmente correcta, incorrecta y en blanco (omitida).

Habiendo accedido a las respuestas dadas por los alumnos, hemos seleccionado algunas que por sus características, nos invitan a reflexionar no sólo sobre su nivel de conceptualización, sino también sobre sus posibilidades concretas de resolución en diferentes temas.

En el caso de los ítems abiertos nos aportan, además, una variedad de datos acerca de los recursos a los que los alumnos apelaron para describir los procedimientos utilizados en esta etapa de su escolaridad primaria, cuestión que aunque resulte compleja por estar relacionada –entre otros aspectos- con la problemática de la explicación y de la reflexión sobre el procedimiento empleado, permite reflexionar sobre el tipo de trabajo matemático que consideramos interesante que los alumnos atraviesen.

Por ello, este informe tiene como propósito compartir con ustedes algunas de las situaciones que los alumnos tuvieron que resolver y una serie de comentarios y análisis realizados sobre los conocimientos y los procesos cognitivos que están en la base de los mismos.

Asimismo, aunque los fines y las características de esta prueba difieren en gran medida de los utilizados cotidianamente en las aulas, no dudamos puedan aportar información útil sobre las dificultades y logros más frecuentes en los alumnos, y al mismo tiempo, proveer algunas sugerencias para trabajar en clase, con el fin de enriquecer la tarea pedagógica, pudiendo ser adaptadas por los docentes a su contexto y a la realidad de sus alumnos y de su escuela.

Los niveles de desempeño

El desempeño de los alumnos en matemática se agrupó en tres niveles para cada año evaluado: alto, medio y bajo.

Los mismos se han determinado a partir de criterios empíricos y pedagógicos, en relación con los rendimientos de los alumnos en la prueba. Cada uno de los niveles es inclusivo en relación con el inmediatamente inferior, es decir, en la medida en que un alumno está ubicado en un determinado nivel, tiene alta probabilidad de resolver con éxito las actividades del mismo y las de los niveles inferiores a aquél.

De este modo, la discriminación de estos niveles facilita la comunicación de lo que los alumnos saben y pueden hacer.

A continuación analizaremos problemas que corresponden a los distintos niveles de desempeño de los alumnos del tercer y sexto año de su escolaridad durante 2010

ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES EVALUADAS

En esta ocasión hemos decidido presentar y analizar, conjuntamente, las actividades abiertas y sus resoluciones correspondientes a los dos años escolares evaluados.

Nos detendremos a mirar las producciones de los alumnos y, en particular los errores que cometen. Pero no cualquier error es de nuestro interés, sino aquellos que son significativos, es decir que posean las siguientes características:

- Se muestran de manera persistente en los alumnos y no pueden explicarse por distracción.
- Son errores representativos de las producciones recogidas.

El análisis de los errores de los alumnos permite a los docentes desarrollar estrategias de remediación¹.

Roland Charnay² analiza qué es considerado como error y qué remediación según las concepciones de enseñanza y aprendizaje.

Desde cierta concepción de enseñanza, el análisis del error se hace en términos de faltas, de anomalías. La responsabilidad del error es del alumno, quien no escuchó, no prestó atención, no aprendió, más que del docente, quien no explicó bien. La solución, en este caso, consiste en apoyar al alumno para que trabaje o estudie más, se vuelve a explicar o dar más ejercicios para practicar, etc.

Charnay apoyándose en Brousseau señala:

“Desde la perspectiva constructivista, el error es la expresión de una forma de conocimiento. “El error no es solamente el efecto de la ignorancia, de la incertidumbre, del azar como se cree en las teorías empiristas o conductistas del aprendizaje, sino el efecto de un conocimiento anterior, que tuvo su interés, su éxito pero que ahora se muestra falso o simplemente inadaptado. Los errores de este tipo no son erráticos, sino que se constituyen en obstáculos. Tanto en el funcionamiento del maestro como en el del alumno, el error es constitutivo del sentido del conocimiento adquirido” (Brousseau, 1983).”

¹ R. Charnay usa el término remediación en el sentido de nueva mediación entre el saber y el alumno. Se trata de todo acto de enseñanza que tenga por objetivo permitir a los alumnos apropiarse de conocimientos luego de que en una primera instancia no lo hayan logrado en la manera esperada.

² Charnay, R. (1990-1991). Op. Cit..

Ciertamente, un error es susceptible de diversos análisis e interpretaciones según el marco desde el que se lo haga. Es por eso que queremos ser cuidadosos en los análisis que proponemos de los errores de los alumnos y queremos dejar en claro que solo se trata de hipótesis. Hemos seleccionado aquellos que proponen un debate en relación a la enseñanza y el aprendizaje

PROBLEMA DE LAS HORAS DE LA SEMANA

El siguiente problema fue planteado a los alumnos de 3° año de la Educación Primaria.

2



Una semana
Tiene 120 horas

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta:

.....

.....

.....

Mostrá cómo lo resolvés.

.....

Se trata de un problema multiplicativo, de proporcionalidad, donde no todos los datos están explícitos. No se trata de hacer un cálculo para responder una pregunta, sino de indicar si están o no de acuerdo con la afirmación de Lucía –que una semana tiene 120 horas-.

Los alumnos suelen estar acostumbrados a encontrar la solución de un problema pero tomar posición frente a una afirmación no siempre es una tarea reconocida por ellos como una actividad matemática. La toma de posición implica poner en palabras una decisión y dar razones por las que tomaron esa posición. Y la actividad de hablar –o escribir– sobre lo que se hizo no siempre es trabajada en las aulas. Solemos escuchar a los docentes quejarse de que los alumnos no saben explicar cómo resuelven un problema, que no pueden contar cómo hicieron para encontrar una solución. Pero ambas actividades son complejas y requieren de un aprendizaje, de un docente que lo considere como una cuestión a enseñar.

Frente a la concepción que plantea que si los alumnos tienen dificultades con la escritura, entonces más dificultades tendrán para explicar, Bautier³ dice:

“En un marco propiamente didáctico, es entonces en un ida y vuelta entre la lengua como forma de decir pero también de aprender y de pensar y la lengua como objeto de análisis donde pueden situarse los aprendizajes que apuntan al dominio de la lengua. La lengua entonces se estudia en los funcionamientos específicos que puede tener en textos de naturaleza muy diferente, en particular en textos que producimos o leemos en la enseñanza (textos científicos, literarios, textos de manuales...) y usos o funciones también muy diversos (para informar, elaborar, explicar un proceso o un funcionamiento...).”

El dominio de la lengua no se restringe a su estudio aislado, sino que su dominio está relacionado con la lengua en los diferentes funcionamientos que se le dará en un marco específico. Así, los textos explicativos, los matemáticos, propios, colectivos o efectuados por el docente aportan al aprendizaje de la lengua en sí misma y en función de las necesidades para la matemática.

³ Bautier, E. (2012). Op. Cit.

Ciertamente, esta postura plantea varias cuestiones. Una de ellas es la enseñanza: ¿de qué manera puede la enseñanza hacerse cargo de lo que le corresponde en cuanto a lo lingüístico? Si los docentes se hacen cargo de enseñar a “decir” matemáticamente, ¿cómo hacen para evaluar lo enseñado? Bautier considera estas preguntas:

Es necesario integrar ciertos principios nuevos y especialmente privilegiar el proceso, el tanteo y el « collage » del resultado. Por ejemplo, la narración de la búsqueda en matemática es tan importante como el resultado en sí mismo. Esto necesita una verdadera revolución en ciertas prácticas de enseñanza y especialmente en las evaluaciones. En efecto, ¿cómo recompensar los esfuerzos de los alumnos en materia de argumentación, de explicitación, etc. sin pasar por ejercicios que no lo tengan por objetivo?

Un punto de discusión considerable lo plantea la evaluación: Si los docentes se hacen cargo de la enseñanza de la explicación, de la escritura de las conclusiones, ¿existen instrumentos para evaluarlos? Claramente no hay –o al menos es complejo diseñar– problemas que evalúen este aspecto de la práctica matemática. Pero queremos dejar planteada la pregunta de si estas cuestiones necesitan efectivamente ser evaluadas en el marco de una prueba escrita, si no existen formas alternativas de ser evaluados.

En cuanto al contenido del problema, hay dos datos que no están explícitos y sin ellos no es posible responder: que un día tiene 24 horas y una semana, 7 días. Se trata, entonces, de decidir si es posible que 24×7 (o un cálculo equivalente) dé 120.

Se espera que los alumnos calculen el resultado de 24×7 o que lo estimen para comparar con 120 y así tomar una decisión. Por ejemplo, pueden decir que como $20 \times 7 = 140$, entonces 24×7 va a dar más que 140, por lo que la respuesta de Lucía no puede ser correcta. Una respuesta de este tipo requiere de alumnos que comprendan que no siempre es necesario plantear o resolver un cálculo para hallar la solución de un problema, que a veces alcanza con una estimación, un resultado aproximado. Para ello es necesario que los alumnos tengan oportunidad de vivir y reflexionar sobre un trabajo de este tipo en la escuela.

Muchos alumnos resolvieron el problema a través de estrategias aditivas, como muestran los siguientes ejemplos.

168..

La cantidad de números a sumar hace que los alumnos que se sienten más cómodos resolviendo sumas puedan usarlas. Esto no significa que no sepan que este problema puede resolverse a través de una multiplicación, sino que es probable que no hayan querido innovar, que hayan elegido un camino más seguro, más aun teniendo en cuenta que se trata de una actividad realizada en el marco de una evaluación.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: No... porque me sumo los 7 días de la semana... sumo menos...

Mostrá cómo lo resolvés.

$$\begin{array}{r}
 2 \\
 + 24 \\
 \hline
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 24 \\
 \hline
 27 \\
 \hline
 168
 \end{array}$$

Respuesta: No porque no sumo los 7 días de la semana sumo menos.

Esta alumna no solo toma una decisión respecto de la validez de la resolución propuesta, sino que además aventura una explicación: Lucía no obtuvo la respuesta correcta porque sumó menos veces el 24, lo cual equivale a considerar menos días.

Respuesta: *No estoy de acuerdo porque cada día tiene 24 horas.*

Mostrá cómo lo resolvés.

$$\begin{array}{r}
 12 \\
 + 12 \\
 \hline
 24 \\
 + 24 \\
 \hline
 48 \\
 + 48 \\
 \hline
 96 \\
 + 96 \\
 \hline
 192 \\
 + 192 \\
 \hline
 384
 \end{array}$$

Respuesta: No estoy de acuerdo porque cada día tiene 24 horas

En este caso, el alumno utiliza una representación particular. Si bien en su explicación aclara que cada día tiene 24 horas, comienza sumando dos veces 12. No queda claro si así está descomponiendo el 24 o si se trata de un error. Más allá de ello, nos parece interesante analizar el tipo de estrategia que pone en juego, que consiste en usar los resultados parciales en los cálculos subsiguientes. La dificultad que acarrea es controlar la cantidad de veces que el número en cuestión fue sumado. Se trata de un buen ejemplo de respuesta incorrecta donde la explicación permite seguir trabajando. El problema original da lugar a uno nuevo, se trata ahora de encontrar una manera de demostrar que 120 no puede ser la cantidad de horas que tiene una semana.

Respuesta: Una semana tiene 120 días

Mostrá cómo lo resolvés.

$$\begin{array}{r} 2 \\ 48 \\ + 48 \\ 84 \\ \hline 120 \end{array}$$

Así también:

$$\begin{array}{c} 20+20+8 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 48 \end{array} + \begin{array}{c} 10+10+80 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 48 \end{array} + \begin{array}{c} 8+20+4 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 24 \end{array} = 120$$

$$= 120$$

Respuesta: "No una semana tiene 120 días."

En este caso, el alumno también agrupa las horas de más de un día en un solo sumando –a pesar de no considerar la cantidad correcta-. Suma 5 veces 24 en lugar de 7, y propone dos maneras diferentes de realizar el cálculo. En uno utiliza el algoritmo de la suma y en otro decide descomponer los números en dieces y unos. Una posible interpretación de esta producción podría ser que confunde horas por días y entonces responde 120 días en lugar de 120 horas y, la cantidad de 5 veces 24 podría estar relacionada con considerar la semana de lunes a viernes (que son los días que va a la escuela).

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: NO

Mostrá cómo lo resolvés.

$$24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 + 24 = 168$$

$$140 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 168$$

$$140 + 28 = 168$$

Este alumno propone un cálculo correcto para responder al problema y muestra una manera interesante de resolver la suma, calculando la suma de dieces y unos por separado.

Parece haber dos usos diferentes de la escritura en este caso.

Por un lado está la suma de los siete 4 y la del 140 (que no necesitó escribir) con el 28. Pareciera que en ese caso usa la escritura para calcular, para averiguar el resultado.

Pero, por otro lado está la suma de los siete 24. Es evidente que no hizo ese cálculo, entonces parece que esa escritura apunta más a ser una explicación.

Ejemplos basados en estrategias multiplicativas

Una cantidad importante de alumnos reconoció la estructura multiplicativa del problema y así lo resolvieron. Algunos mostraron el modo en que realizaron los cálculos, mientras que otros no.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: No porque una semana tiene 168 horas

Mostrá cómo lo resolvés.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \end{array}$$

Respuesta: No porque una semana tiene 168 horas

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: en total es 158 horas

Mostrá cómo lo resolvés.

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 7 \\ \hline 158 \end{array}$$

Respuesta: en total es 158 horas

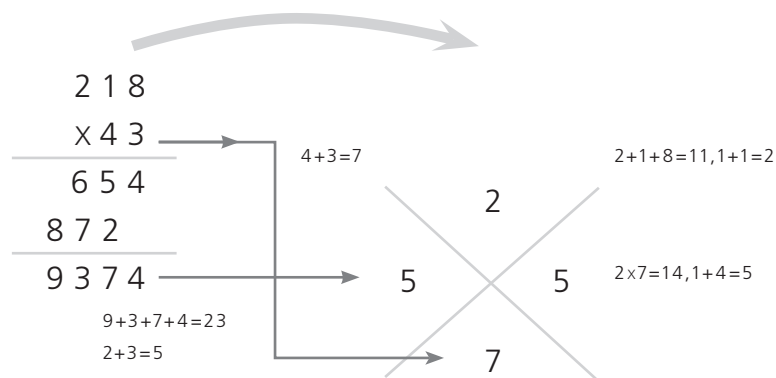
Si bien la respuesta del alumno no es correcta, nos interesa detenernos en la “prueba” que realiza para saber si su multiplicación está bien o no. Se trata de la prueba del nueve. Esta prueba se enseñó en las escuelas durante mucho tiempo pero muy pocos saben por qué funciona, qué información provee.

La regla consiste en dibujar una gran X y llenar cada uno de los cuatro espacios que quedan definidos con la suma de los dígitos de alguno de los números que intervienen en el producto. Si al sumar los dígitos, se obtiene un resultado mayor que 9, se vuelven a sumar los dígitos de ese valor hasta obtener un resultado final menor que 9. Estas sumas se ubican en la X de la siguiente manera:

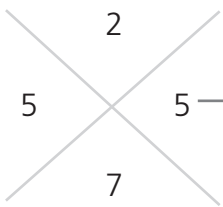
- Arriba: Suma de dígitos del primer factor del producto.
- Abajo: Suma de dígitos del segundo factor del producto.
- Izquierda: Suma de dígitos del resultado.
- Derecha: Producto de los números ubicados arriba y debajo de la X. Si el resultado es mayor que 9, se suman sus dígitos y ese es el valor que allí se ubica.

Finalmente, se analizan los 4 valores. Si los dos números ubicados a la izquierda y derecha de la X son iguales, entonces el producto es correcto. Si no son iguales, es incorrecto.

El siguiente ejemplo ilustra la regla:



Ahora bien, un error muy común que los alumnos cometen es alinear los productos parciales de modo incorrecto. Claramente, el resultado que se obtiene en ese caso no es correcto, pero ¿qué nos dice la prueba del 9?

$$\begin{array}{r}
 218 \\
 \times 43 \\
 \hline
 654 \\
 872 \\
 \hline
 1526
 \end{array}$$


$$\begin{array}{l}
 2 \\
 5 \rightarrow 2 \times 7 = 14 \\
 7 \\
 4 + 1 = 5
 \end{array}$$

La prueba nos dice que el resultado es “correcto” a pesar de que no les. Entonces, si hay casos donde esta prueba no funciona como tal, ¿esa información es realmente un criterio de validación?

Para responder esta pregunta proponemos analizar con mayor profundidad esta prueba.

¿Por qué se llama prueba del 9?

¿Por qué puede dar “información falsa”?

Los pasos descritos más arriba no mencionan en ningún momento al número 9, sin embargo se trata de una prueba que se apoya en él.

El nombre de la prueba reside en que la suma de los dígitos de un número coincide con el resto de dividir a ese número por 9. Veamos por qué en el caso de números de 4 cifras⁴:

Cualquier número de 4 cifras puede escribirse como $a.1000 + b.100 + c.10 + d$, donde a , b , c y d son sus dígitos. Este mismo número puede reescribirse del siguiente modo:

$$\begin{aligned}
 1000. a + 100. b + 10. c + d &= 999a + a + 99b + b + 9c + c + d \\
 &= (999a + 99b + 9c) + a + b + c + d
 \end{aligned}$$

⁴ La demostración para números con más o menos cifras es análoga

Los tres primeros términos de la suma corresponden a múltiplos de 9, pues en cada caso uno de los factores es múltiplo de 9. El número puede entonces pensarse como un múltiplo de 9 más la cantidad $a + b + c + d$, que no es otra que la suma de los dígitos.

Para el ejemplo que estamos analizando, esta descomposición sería:

$$\begin{aligned} 218 &= 200 + 10 + 8 \\ &= 198 + 2 + 9 + 1 + 8 \\ &= (198 + 9) + (2 + 1 + 8) \end{aligned}$$

El número del primer paréntesis es un múltiplo de 9 pues es la suma de dos múltiplos de 9, mientras que el número del segundo paréntesis es la cantidad que este número se pasa de un múltiplo de 9. Pero como $2 + 1 + 8$ es mayor que 9, aun es posible extraerle otro múltiplo de 9:

$$\begin{aligned} 2 + 1 + 8 &= 11 \\ &= 9 + 2 \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} 218 &= (198 + 9) + 11 \\ &= (198 + 9 + 9) + 2 \end{aligned}$$

El 2 es la cantidad que 218 se pasa de un múltiplo de 9, es decir el resto de dividir el número 218 por 9. El 2 surge de sumar dos veces los dígitos de 218: $2 + 1 + 8 = 11$ Y $1 + 1 = 2$.

De la misma manera, $43 = 36 + 7$. El resto de dividir a 43 por 9 es 7 –la cantidad que se pasa 43 de un múltiplo de 9- y coincide además con la suma de los dígitos.

Luego, una forma de obtener el resto de la división entre un número y 9 es sumando sus dígitos del modo descrito más arriba.

Los números que aparecen arriba, abajo y a la izquierda en la cruz son los restos al dividir por 9 de cada uno de los factores y del resultado, respectivamente. En el casillero de la derecha se ubica el producto de los restos de los factores.

La regla coteja si los valores que aparecen a la izquierda y la derecha coinciden, es decir postula la necesidad de que sean iguales el resto de dividir por 9 del resultado con el producto de los restos de los factores.

¿Por qué tienen que coincidir estos valores?

Analizamos la situación a partir del ejemplo planteado. El producto puede pensarse de la siguiente manera:

$218 \times 43 = (216 + 2) \times (36 + 7)$	Reescribiendo cada número como un múltiplo de 9 más un número menor que 9
$218 \times 43 = (216 \times 36 + 216 \times 7 + 2 \times 36) + 2 \times 7$	Aplicando propiedad distributiva
$218 \times 43 = (216 \times 36 + 216 \times 7 + 2 \times 36) + 14$	
$218 \times 43 = (216 \times 36 + 216 \times 7 + 2 \times 36) + 9 + 5$	Reescribiendo 14 como un múltiplo de 9 más un número menor que 9
$218 \times 43 = (216 \times 36 + 216 \times 7 + 2 \times 36 + 9) + 5$	

En el segundo paso puede verse que el producto puede expresarse como un múltiplo de 9 –lo que se encuentra entre paréntesis- más el resultado de 2×7 . Es decir, que 218×43 se pasa 2×7 unidades de un múltiplo de 9 o, dicho de otra forma, el resto de dividir a 218×43 por 9 es 2×7 , que no es otra cosa que el producto del resto de dividir a 218 por 9 (2) por el resto de dividir a 43 por 9 (7).

La prueba del 9 no hace más que verificar si el resto al dividir por 9 el resultado coincide con el producto de los restos de los factores. Si la respuesta es correcta, esos restos tienen que coincidir.

Pero entonces, ¿por qué esta prueba puede proporcionar información que no es verdadera?

En principio la regla nos dice que si sabemos que la respuesta es correcta, entonces los dos números coinciden. No dice qué sucede en caso de que la respuesta no sea correcta, y es justamente en esa situación donde se introducen casos extraños. Cuando el resultado del producto es incorrecto, los valores de la izquierda y derecha de la X pueden o no coincidir, tal como se vio en el ejemplo de más arriba.

Lo que esta regla nos permite afirmar son dos cuestiones:

- Si el producto es correcto, entonces los valores de la izquierda y derecha de la X coinciden.
- Si no coinciden esos valores, entonces el producto es incorrecto.

Sobre cualquier otro caso no es posible afirmar nada respecto del resultado del producto, como en el caso de un producto incorrecto para el que los dos valores en cuestión coinciden.

Pero puede ocurrir que los números de la izquierda y la derecha de la X coincidan, aun cuando la cuenta esté mal resuelta, como en este caso. Por ejemplo:

1 5 4	
x 7 2	
3 0 8	
1 0 7 8	
2 0 0 8 8	

1	
9	9
9	

Desde el punto de vista de la enseñanza, la dificultad que implica entender por qué esta prueba funciona y en qué casos no proporciona información hace que no sea posible tratarla en la escuela primaria, si nos basamos en una concepción de enseñanza donde el alumno tiene que poder comprender las herramientas que usa.

Desde el punto de vista de los niños, para el ejemplo con el que abrimos este apartado

2 4	
x 7	
1 5 8	

5	
8	8
7	

puede verse que la cuenta tiene un resultado equivocado y que además en la prueba del nueve el 5 que aparece en la parte superior de la cruz debería ser un 6 y el 8 de la derecha debería ser un 5 (que surge de 158 como $1 + 5 + 8 = 14$ y entonces $1 + 4 = 5$). Una interpretación posible es que este alumno intercambié esas dos cifras –el 5 y el 8– para que la prueba indicara que la cuenta está bien hecha. Es interesante notar que la explicación de por qué se está o no de acuerdo con la afirmación se deslizó a señalar que la cuenta está bien hecha forzando un mecanismo que aparece despojado de las razones que lo sostienen. Resulta entonces tan arbitrario que los números aparezcan colocados en algunas posiciones o como en otras.

Las explicaciones de los alumnos de 3º año

Según su experiencia, los alumnos de 3º año ponen en juego diversas maneras de explicar la toma de decisión por una posición. La calidad de las explicaciones puede verse enriquecida por el tipo de práctica a los que se los invita. Por ejemplo, ¿la explicación es tema de debate en la clase?, ¿Esta práctica está en el horizonte de enseñanza para que los alumnos puedan incorporarla?, etc.

Es frecuente encontrar alumnos que explican del modo siguiente:

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: *Si*.....

.....

.....

Mostrá cómo lo resolvés.

Pensando.....

.....

.....

Respuesta: Si

Mostrá cómo lo resolvés: Pensando

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: *Si tenerazon*

Mostrá cómo lo resolvés.

Resolví con la mente

Respuesta: Si tenerazon

Mostrá cómo lo resolvés: Loresolvi con la mente

En un caso, el alumno indica que pensó, que es la actividad que realizó para tomar una decisión, pero no dice sobre qué pensó, no se conoce el contenido de ese pensamiento. En el otro caso, cuenta qué usó para pensar, pero también omite decir qué. En estos casos no se sabe si el alumno considera que las razones que da son suficientes, si piensa que le están haciendo una pregunta obvia o si es consciente de que sus razones no son suficientes.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: *No... estoy de acuerdo con Luciana por que...*
no es verdad

Mostrá cómo lo resolvés.

Respuesta: No estoy de acuerdo con Luciana por que no es verdad

Su respuesta equivale a decir que no está de acuerdo porque no. Se trata de otro caso donde se dice algo sobre la toma de decisión pero nada respecto a por qué. En todos estos casos las explicaciones se basan en las acciones que dieron origen al razonamiento que permite concluir o al resultado de ese razonamiento sin que aparezca de manera explícita su contenido.

En el ejemplo que sigue, el alumno intenta apoyar su decisión con un cálculo, dando la pauta de que, para él, una explicación tiene que incluir algún aspecto matemático. En este caso, las cuentas que propone nada tienen que ver con los números planteados en la situación.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: *Sí, estamos de acuerdo.*

Porque dice la verdad que tiene la semana.

Mostrá cómo lo resolvés.

$$\begin{array}{r} 10 \\ \times 2 \\ \hline 20 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ \times 10 \\ \hline 200 \end{array}$$

Respuesta: *Sí estamos de acuerdo*

Porque dice la verdad que tiene la semana

En este caso el alumno intenta una explicación a través de un cálculo.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué? *Sí*

Respuesta: *Sí, porque creo que está bien.*

Mostrá cómo lo resolvés.

$$\begin{array}{r} \text{Así: } 100 \\ + 20 \\ \hline 120 \end{array}$$

Respuesta: *Sí porque creo que está bien*

Una vez que decidió que la respuesta de Lucía es correcta, busca un cálculo que sostenga su postura. Sin embargo, esta cuenta no explica por qué 120 sería el resultado correcto, sino que proporciona un cálculo que da 120.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: *Si tiene razon*

.....

.....

.....

Mostrá cómo lo resolvés.

porque son 7 dias.

.....

.....

Respuesta: Si tiene razon.

Mostrá cómo lo resolvés: porque son 7 días.

Algunas explicaciones son parciales y exhiben argumentos que, por sí solos, no alcanzan para explicar. Es necesario saber que una semana tiene 7 días, pero también se necesita saber que hay que hallar el producto entre 7 y 24 para conocer la cantidad de horas en una semana.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: *No estoy de acuerdo con Lucía*
porque una semana no puede tener 120 hs.

Mostrá cómo lo resolvés.

7 semanas y por cada una ecíbele a 12 horas y
sería una semana entera 48 hs.

Respuesta: No estoy de acuerdo con Lucía porque una semana no puede tener 120 hs.

Mostrá cómo lo resolvés: 7 semana y por cada una ecíbele a 12 horas y sería una semana entera 48 hs.

Entre las explicaciones incorrectas encontramos muchas verdades parciales. Aquí, la alumna decide que Lucía no tiene razón, pero llega a esa conclusión a través de un razonamiento incorrecto. Supone que cada día tiene 12 horas, aunque calcula incorrectamente la cantidad de horas en una semana.

Es también interesante detenerse en los que dicen no saber cómo encontrar la respuesta.

¿Estás de acuerdo con lo que dice Lucía? ¿Por qué?

Respuesta: *No se la hora*

.....

.....

Mostrá cómo lo resolvés.

.....

..... *No se la hora*

Respuesta: No se la hora.

Mostrá cómo lo resolvés: No se la hora.

Este alumno cree que necesita conocer la hora para poder resolver este problema. Es muy probable que disponga de los conocimientos necesarios, pero no logra identificar cuáles necesita.

¿Cómo se enseña a explicar? ¿Es posible pensar en una evolución de la calidad de las explicaciones que brindan los alumnos? ¿Qué relación hay entre las explicaciones que se brindan en el marco de un debate y las que se realizan de forma individual? ¿Y las que ofrece el maestro en la clase?

Creemos que se enseña a explicar, y que como consecuencia de esto las explicaciones de los alumnos evolucionan a medida que adquieren más conocimientos. Sin embargo, no es posible enseñar a explicar de modo directo, no es posible atrapar su enseñanza a través de un discurso.

Según el decir de Erna Yackel⁵:

“[...] este enfoque [...] ayuda a clarificar la relación entre lo individual y lo colectivo, es decir, entre las explicaciones y justificaciones que cada estudiante brinda en circunstancias específicas y las prácticas matemáticas de la clase que se convierten en compartidas. A medida que las prácticas matemáticas se convierten en compartidas por una clase, no necesitan justificación y, por lo

⁵ Yackel, Erna (2001). Op. Cit.

tanto, evoluciona lo que se requiere como dato, garantía y respaldo. Por ejemplo, en una clase de 2° grado, las explicaciones de las resoluciones que involucraban estrategias de pensamiento se convertían más crípticas con el tiempo. Para un problema como $5+6=$ __, los alumnos al inicio daban explicaciones como “yo sé que 5 y 5 es 10 y 6 es uno más; es uno más que 5 entonces el resultado es 11; uno más que 10”. Más adelante, una explicación típica era “5 y 5 es 10 entonces es 11”. En este caso, cuando las explicaciones del segundo tipo ya no se cuestionan, podemos asumir que la garantía y el respaldo dados por el primer tipo de explicación son ahora compartidos⁶. Al mismo tiempo, es a través de explicaciones del primer tipo que evolucionan las comprensiones compartidas.”

El trabajo colectivo sobre las explicaciones contribuye a los aprendizajes individuales. Y es a medida que evolucionan estas explicaciones colectivas que algunas nociones se vuelven compartidas, lo que implica que en muchos casos los niños no necesiten explicitar más lo que para ellos resulta evidente.

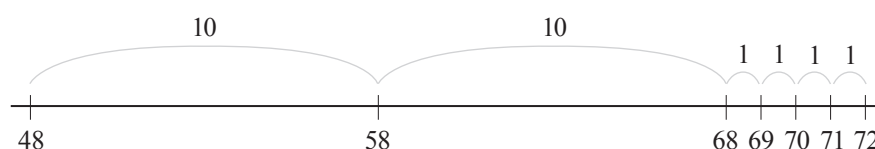
El docente juega un rol central en el trabajo que se realiza en clase a propósito de la argumentación, pidiendo aclaraciones o más datos, o brindándolos él mismo cuando las explicaciones contienen elementos implícitos. Se trata de comunicar a los alumnos que son necesarias más precisiones para que la explicación sea más completa.

Y agrega Yackel:

“[...] también doy un ejemplo de una clase de 2° grado. Para explicar cuánto tenía que sumar a 48 para llegar a 72, Louis dijo “Es 24. Para encontrarlo dije 48, 58, 68, 69, 70, 71, 72”. La docente sabía que aproximadamente la mitad de los chicos de su grado aún no sabían que la diferencia entre 48 y 58 era 10. Por lo tanto, lo que Louis dijo para apoyar su conclusión no habría tenido relevancia explicativa para ellos. Era necesaria una garantía. Sin esperar que alguno pregunte, la docente le pidió a Louis que amplíe al decirle “Vos dijiste 48, 58, ¿cuánto da eso?” Louis respondió “Diez”. Ella continuó, “Y después dijiste 68, ¿y cuánto es eso?”. Louis contestó “Veinte”. La maestra continuó diciendo “Es veinte en total. Y después seguiste contando de a uno, no? Dijiste 69, 70, 71, 72... Entonces te dio un diez y otro diez y cuatro unos y

⁶ Podría argumentarse que los estudiantes no cuestionan este tipo de solución porque no están interesados o simplemente no quieren hacer preguntas. Podemos eliminar estas posibilidades en este caso debido a las normas sociales que operaban en esta clase. En esta clase los alumnos asumían la obligación de hacer preguntas cuando no estaban de acuerdo o no entendían. Es por esta razón que pudimos interpretar la falta de preguntas como un indicador de algo compartido.

así te dio 24.” En este episodio vemos a la maestra trabajando junto a Louis para desarrollar la garantía necesaria. Además, a medida que ella y Louis desarrollaban la garantía verbal, la maestra dibujó el siguiente diagrama en el pizarrón.



La acción de realizar el diagrama vinculó la solución de Louis con la recta numérica vacía⁷, una notación pedagógica que se usaba regularmente en la clase en ese momento. En general, la intención detrás de esto era usar la recta numérica vacía como un medio para registrar el razonamiento de los alumnos con el objetivo de que luego se convierta en una herramienta de razonamiento para ellos. En este caso, los numerales escritos debajo de la recta registraban la información que Louis dio, mientras que los arcos y numerales escritos sobre la recta registran la información adicional proporcionada en la garantía. En este sentido, el diagrama tomó la forma de un registro de la argumentación porque incluyó un registro de los datos y la garantía.

En este ejemplo, la docente inició tanto el diagrama como la elaboración verbal de la solución de Louis. Sus acciones lograron varios objetivos. El primero es poner la atención en un soporte argumentativo para la conclusión. En segundo lugar, contribuyó a la comprensión de la clase acerca de qué es considerado un soporte argumentativo.”

⁷ La recta numérica vacía no tiene unidades marcadas. Por lo tanto, a diferencia de la recta numérica (marcada) que frecuentemente se usa en la escuela primaria como un modo de registrar respuestas, la recta numérica vacía no puede usarse para cálculos directos. Su potencia proviene del imaginario que usan los alumnos cuando piensan en movimientos hacia adelante y atrás de un número hacia otro. No puede obtenerse información sobre la distancia entre dos números por observación directa de la recta numérica vacía.

Como se ve en estas situaciones, la docente aporta a los argumentos dados por el alumno, de modo que la explicación pueda ser comprendida por toda la clase. Al mismo tiempo, da pautas acerca de qué constituye una explicación aceptable para esta clase. Es decir, que en su gestión del debate también está enseñando ciertas características que debería tener la explicación. Ciertamente no se trata de una enseñanza directa. No se trata de un contenido que pueda ser atrapado por un discurso, sino de un modo de hacer en el que se toman ciertas referencias como por ejemplo, las maneras de construir razones que utiliza el maestro, las que alienta a que circulen por la clase y hace públicas, las que sostiene cuando sus alumnos proporcionan fragmentos incompletos, las que rechaza, etc. Como los docentes saben, se trata de una tarea ardua.

PROBLEMA DE LA GRANJA

1 En una granja hay 200 animales. La quinta parte son cerdos y el resto son aves. ¿Cuántos cerdos y aves hay?

Mostrá cómo lo resolvés

El siguiente problema fue parte de la evaluación de 6° año de la Educación Primaria.

Para resolver este problema se necesita del concepto de una fracción de un entero. Es esperable que los alumnos relacionen un quinto de una cantidad con el resultado de dividirla por 5 o que apelen al concepto de fracción que va desde la parte al todo⁸. En referencia a esto, los alumnos necesitarán poner en juego que un quinto de una cantidad es un valor que repetido 5 veces da la cantidad en cuestión.

El problema tiene su complejidad porque se trata de un contexto discreto donde existen dos unidades simultáneas: el conjunto de los 200 animales y cada animal que está en la granja. Entonces $1/5$ se puede pensar como uno de cada 5 o considerar los 200 animales a los que es necesario separar en 5 grupos iguales.

⁸ Desde esta mirada, $1/5$ es un número tal que al sumarlo 5 veces, da 1.

Las resoluciones que se presentan están más vinculadas con considerar los 200 a los que se los separa en 5 grupos iguales, uno de los cuales está completamente formado por cerdos. Posiblemente el tamaño de los números haya bloqueado la interpretación de 1 de cada 5.

Otra cuestión a considerar y que hace complejo el problema es que se trata de un contexto discreto es que se puede confundir la cantidad de grupos con la cantidad de animales por grupo.

Ejemplos de resolución basados en divisiones

Muchos alumnos utilizaron una división y una diferencia para resolver el problema, como en los ejemplos siguientes.

Handwritten student work showing two methods to solve a problem:

Method 1 (Division):

$$200 : 5 = 40$$

$$40 \times 4 = 160$$

$$200 - 160 = 40$$

Method 2 (Difference):

$$200 - 160 = 40$$

Both methods conclude with:

40 cerdos
160 aves

Este alumno no solo divide para encontrar la quinta parte y halla la cantidad de aves por diferencia con 200, sino que además comprueba que la suma de las dos cantidades que obtiene efectivamente sea 200. Se trata de una estrategia de control que le permite obtener información acerca de las acciones efectuadas para resolver el problema.

Ejemplos en los que se utilizan fracciones

Otros alumnos usaron fracciones para el cálculo de $\frac{1}{5}$ de 200.

The image shows a student's handwritten work on lined paper. On the left, the student has written $\frac{1}{5}$ de 200 = 40. On the right, there is a subtraction problem: 200 minus 40, with a horizontal line under 40 and the result 160 written below it. At the bottom of the page, the student has written 'Respuesta: 40 cerdos y 160 aves'.

Respuesta: Hay 40 cerdos y 160 aves.

Si bien el alumno expresa la cantidad a hallar como una fracción, no muestra el cálculo que hizo para encontrarla. No podemos saber qué hizo, pero es posible que lo haya hecho como un cálculo mental o que haya utilizado otro papel.

Granja — 200 animales

caballos — $\frac{1}{5}$

aves — ?

40

200 de $\frac{1}{5}$ = 40 (caballos)

5

1

200

- 40

160 (Aves)

En este caso, el alumno usa fracciones para traducir los datos del enunciado, pero expresa la cantidad a hallar como 200 de $\frac{1}{5}$ en lugar de $\frac{1}{5}$ de 200. El cálculo lo realiza de manera correcta, simplificando las fracciones. Esto puede dar cuenta de un alumno que comprende la situación que se plantea y que propone una escritura matemática porque cree que eso es lo que hay que mostrar. Esta escritura, para él, tiene más un carácter de etiqueta que de estructura algebraica u operatoria en la que se apoya para hallar la solución.

Si bien $\frac{1}{5}$ de 200 y 200 de $\frac{1}{5}$ dan el mismo resultado, los valores que se obtienen no tienen el mismo sentido dentro del contexto que se plantea.

Suma 5 veces 40 y me dio
200

Respuesta: hay 100 de cerdos y 10 de
Aves.

Si bien este alumno calcula de manera correcta la quinta parte de 200 y muestra que 5 veces esa cantidad da 200, no logra dar la respuesta correcta.

Handwritten student work on a lined paper. The top part shows a calculation: $200 : 5 = \frac{1}{200} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{1000}$. The bottom part shows a handwritten response: "Respuesta: En la granja hay $\frac{2}{1000}$ cerdos y aves".

Respuesta: En la granja hay 2/1000 cerdos y aves

Este alumno plantea correctamente el cálculo para hallar $1/5$ de 200, pero luego intenta utilizar un algoritmo incorrecto para multiplicar fracciones.

Es interesante analizar qué hace. Invierte ambas fracciones –en lugar de hacerlo solo con el divisor- para luego multiplicarlas. Por un lado se ve cómo el alumno hace uso de una técnica que no parece tener sentido para él. Por el otro, el uso de una técnica errónea hace que el resultado no sea coherente y pasa sin que el alumno se dé cuenta (aunque

puede ocurrir que, dado que es una prueba prefiere poner algo con números). Obtiene un resultado menor que 1 para la división $200 : 5$, que además da como resultado de la cantidad de cerdos y aves. Tuvo así dos ocasiones para controlar su resultado, pero no las pudo utilizar. Esto se vincula con el ejemplo que exhibimos sobre la prueba del nueve. Se trata de otro ejemplo en el que la utilización de una técnica de la que se desconoce las razones de su funcionamiento deja al alumno sin herramientas de control.

Las estrategias de control, otra herramienta para el trabajo matemático, también pueden y deben enseñarse. No se trata de una actividad que los alumnos realicen naturalmente, sino que es necesario trabajar sobre la importancia de disponer de estos elementos que permiten controlar el trabajo.

Ejemplo: Dificultades de interpretación del enunciado

En el siguiente ejemplo se ve cómo el alumno toma el 5 de un quinto como la cantidad de cerdos y encuentra la cantidad de animales restantes a través de una diferencia.

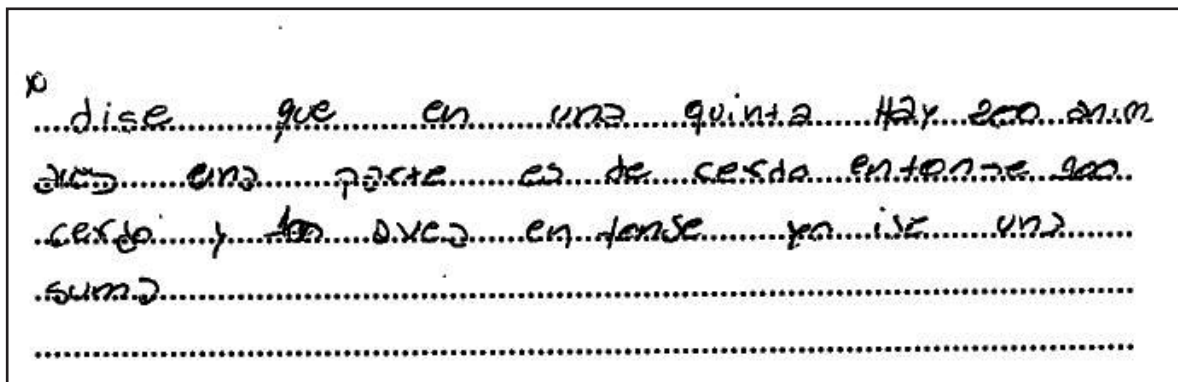
9.9
195
+ 5 -
200

Respuesta: hay 195 haves y 5 cerdos

Respuesta: hay 195 haves y 5 cerdos

Es interesante que el alumno haya pensado en una suma, con números muy simples y que haya decidido mostrarla. Ciertamente se trata de un cálculo que puede resolver mentalmente y es posible que haya decidido mostrarlo a modo de explicación.

No es raro que los alumnos tomen datos de manera errónea y hagan algún cálculo con ellos. Se trata de alumnos que “saben” que los problemas en matemática se resuelven con los números que están en el enunciado y haciendo alguna cuenta. El alumno, al leer un quinto, interpreta que se trata de un valor relacionado con cinco, que toma como la cantidad de cerdos. Es decir, que a pesar del error cometido, puede resolver el resto del problema de manera coherente.



Respuesta: dise que en una quinta hay 200 animales una parte es de cerdo entonces 200 cerdo y los otros en donde yo ise una suma

Este alumno interpreta “una quinta parte” como una quinta donde se tienen los animales. Ciertamente, resulta un término desconocido para él, que por lo tanto interpreta desde sus conocimientos. Se ve aquí una diferencia con el alumno anterior, quien logra interpretar la situación.

Es fundamental que el maestro ayude a sus alumnos a entender lo que plantea la situación antes de que se pongan a resolver. No se trata de explicarles con detalle ni llegar a darles tantas pistas que el problema deja de serlo. La idea es que todos puedan encarar la resolución de un problema entendiendo de qué se trata.

Ejemplo: Dificultades ligadas al cálculo

En el ejemplo que sigue, el alumno intenta hallar un quinto de 200 calculando 4 veces la mitad de esa cantidad.

Handwritten student work on a lined paper. At the top, the student has written $200 = 100 = 50 = 25 = 12,5$. To the right, there is a subtraction problem: $200,0$ minus $12,5$ equals $197,5$. At the bottom, the student has written "Respuesta: Hay 12,5 de cerdos y 197,5 de aves en la granja."

Respuesta: Hay 12,5 de cerdos y 197,5 de aves en esa granja.

Como halla la mitad 4 veces, encuentra 5 partes cuya suma no da el total de animales. Cuando lee "quintos" entiende que son necesarias 5 partes, pero no que al unirlas se debe obtener el total.

Muchos alumnos, como el que sigue, interpretan que es necesario hacer una división, pero dividen el total por la mitad.

Es una division

Respuesta: A y 100 cerdo y 100 oves

Respuesta: Es una division
Ay 100 cerdo y 100 aves

Estos alumnos reconocen que un quinto se refiere a una parte del total, que vincula con la mitad. Es posible que no disponga de conocimientos suficientes sobre una fracción como $\frac{1}{5}$ y que solo maneje aquellas más simples, como $\frac{1}{2}$ o $\frac{1}{4}$.

En una granja abia 200 anima
y la mita son chanco y la otra
mita son abe y se forma 200: chanco
habia 100 y abes 100

Respuesta: En una granja abia 200 anima y la mita son chanco y la otra mitad son abe y se forma 200: chanco había 100 y abes 100

Otro caso donde el alumno habla de mitades –cuando no se mencionan en el problema-. Cuando dice que entre las dos partes se forma 200, muestra que entiende que cuando el conjunto de partes forman un entero, su suma tiene que dar ese valor.

Ejemplo: Otras interpretaciones

2.00
x 5
1000

Frente a un problema desconocido o para el que no se tienen estrategias, existen alumnos que plantean algún cálculo para resolverlo. Muchas veces, como en este ejemplo, no da respuesta al problema. Es posible que sea porque no sabe cuál es –busca dos cantidades y encuentra solo una- o porque simplemente lo olvidó.

Acerca de las herramientas de control

“Tener herramientas de control” se ha convertido en una frase de uso muy extendido y vale la pena analizar la amplitud de sentidos que plantea. Tener control significa determinar si el resultado al que se está llegando es o no razonable y eso puede hacerse de diferentes maneras según el caso: a través de interpretar el significado de los datos en el contexto de la situación, a través de la estimación de los resultados que van a obtenerse, a partir de vigilar el sentido de los resultados parciales que se van obteniendo, entre otras. Todas estas cuestiones son contenidos de enseñanza que, como también dijimos acerca de la explicación, no se agotan en la explicitación, no se enseñan diciéndole a los chicos que controlen los resultados sino dándoles herramientas para que lo puedan hacer y estimulando su uso.

El control supone dos problemáticas esenciales. Una se refiere a la necesidad del control, es decir que los alumnos consideren el control como parte del trabajo matemático, por un lado, y que, por el otro, asuman la responsabilidad de realizarlo. La otra problemática, suponiendo que los alumnos tienen la habilidad de utilizar herramientas de control, está vinculada con la posibilidad de efectivizarlo.

Los diferentes contenidos llevan a diferentes usos y características del control. Hay situaciones en las que el control se realiza sobre el resultado final, generalmente cotejándolo con los datos y el contexto del problema. En otros casos, el control se efectúa sobre los diferentes pasos que llevan a la resolución del problema. En la mayoría de las ocasiones, el control necesita estar acompañado de una anticipación de al menos alguna característica del resultado esperado.

En cuanto a la posibilidad de realizar un control, hay alumnos que, a partir de una intervención docente que les muestra una contradicción, no logran encontrar los medios para revisar lo hecho. Otros no logran siquiera percibir la contradicción.

Mabel Panizza⁹ señala que:

“De hecho, en el marco de las escrituras aritméticas, cuando los alumnos que están estudiando llegan a través de un razonamiento a una igualdad del tipo $2 = 3$, esta escritura en sí misma les da información que funciona como un elemento de control”.

⁹ Panizza, Mabel (2010). *Op. Cit.*

La igualdad falsa informa acerca de algo que no funciona bien, que los alumnos intentarán interpretar. Esta es una de las posibles situaciones que pueden ocurrir en el marco aritmético. Otra posibilidad, tal vez más difícil de “ver” se da en el caso de que no haya una contradicción evidente en el proceso de resolución, llegando a un resultado que los alumnos tendrán que contrastar con los datos del problema. Y ese resultado no siempre se muestra claramente en contradicción.

La posibilidad de que una información (resultado de un cálculo, intervención externa, etc.) pueda funcionar como retroalimentación del trabajo hecho depende de muchas variables, entre las que se encuentran la habilidad de los sujetos para “ver” esas informaciones, sus posibilidades de entrar en contradicción, la capacidad de los alumnos para interpretar y analizar diferentes tipos de afirmaciones, etc.

Pensamos que la enseñanza debería intentar hacerse cargo de la enseñanza del hacer matemática, que incluye el uso del control.

Hay problemas que trabajan sobre estas cuestiones, como los siguientes:

Problema A

Sin hacer cálculos, indicá si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

- Al multiplicar el número 1000 por otro número puede obtenerse un resultado menor que 1000.
- Al multiplicar el número 1000 por otro número puede obtenerse un resultado mayor que 1000 pero menor que 2000.

Los alumnos, al tener que decidir si estas afirmaciones son verdaderas o falsas, tienen que poner a prueba sus concepciones sobre los números y las operaciones entre ellos.

Al transitar por los primeros años de la escolaridad primaria, los estudiantes construyen concepciones acerca de los resultados de las operaciones, por ejemplo, que la multiplicación agranda y la división achica. Se trata de una propiedad con un dominio de validez: vale en todos los casos que se multipliquen números naturales y en algunos casos cuando se trabaja con racionales. Es decir, que no es una propiedad verdadera para todos los números, aunque se considera localmente verdadera cuando los únicos números que conocen los alumnos son los naturales.

Es muy importante que los alumnos tengan oportunidades de poner a prueba estas concepciones erróneas para así construir conocimientos que funcionen como herramientas de control al resolver cálculos. Estos problemas plantean una reflexión sobre una nueva propiedad del producto entre fracciones: no siempre se agranda el resultado ni se obtienen múltiplos enteros del número. Por ejemplo, al multiplicar $1000 \times 0,5$ se obtiene 500. Y para obtener un número entre 1000 y 2000 los alumnos deberán considerar que es necesario multiplicar por un número que sea mayor que 1 y menor que 2, por ejemplo 1,25 o 1,789, aunque hay infinitos números posibles.

Problema B

Completar el siguiente cuadro sin hacer las sumas o restas que se proponen.

Cálculo	El resultado está entre 100 y 200	El resultado está entre 200 y 300	El resultado está entre 300 y 400	El resultado está entre 400 y 500
$120 + 79$				
$152 + 50$				
$218 + 37$				
$375 - 50$				
$220 - 43$				
$380 + 22$				
$111 + 90$				

Esta situación propone un trabajo sobre la estimación de resultados de una suma o resta. Tal como dijimos, se trata de una práctica necesaria para poder controlar: la estimación previa del resultado da un rango entre los cuales debería encontrarse su resultado, lo cual permite clasificarlo como erróneo en caso contrario.

A modo de cierre

La muestra de errores que seleccionamos dan cuenta de alumnos que muchas veces no parecen estar resolviendo los problemas de manera reflexiva. Pero más allá de detenernos en todo lo que los estudiantes no pueden hacer sería importante reflexionar acerca de qué puede hacer la enseñanza para que estos niños estén mejor posicionados respecto de su aprendizaje.

No se trata de hacer que los errores desaparezcan. De hecho, muchos de ellos dan cuenta de un proceso, de una evolución en el aprendizaje y no es posible ni deseable evitar que aparezcan para poder trabajar sobre esas conceptualizaciones. Pensamos en clases donde los errores son utilizados para debatir acerca de su origen, de las concepciones escondidas detrás de ellos. El poder hablar sobre los errores, reflexionar sobre las causas que llevaron a cometerlos permitirá que los alumnos estén mejor preparados para pensar sobre su práctica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAUTIER, Elisabeth. Lecture, écriture, maîtrise du langage. Lire et écrire pour penser et apprendre. Université Paris VIII. Obtenido en http://www-zope.ac-strasbourg.fr/sections/enseignements/secondaire/pedagogie/les_disciplines/lettres-histoire_dan/lettreshistoire-geo/dossiers/lecture/elisabeth_bautier_-/_downloadFile/file/E_Bautier_-/_Lire_ecrire__penser_apprendre.pdf?nocache=1237144978.03, febrero de 2012.

BROUSSEAU, Guy, 1983. Les obstacles épistémologiques et les problèmes mathématiques. Recherche en Didactique des Mathématiques Vol 4-2, Ed. La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU, Guy, 1986. Fundamentos y métodos de la didáctica de las Matemáticas. Córdoba, Argentina. Facultad de Matemática, Astronomía y Física. Universidad Nacional de Córdoba.

Brousseau, Guy, 2009. L'erreur en mathématiques du point de vue didactique. Janvier 2009 n° 7, Tangente Education. Obtenido en: http://www.tangente-education.com/articles/tge_07_a1.pdf, marzo de 2012.

CHARNAY, Roland, Mante, Michel. De l'analyse d'erreurs en mathématiques aux dispositifs de remédiation: quelques pistes... Grand N° 48, p. 37-64, 1990-1991.

DOUADY, Régine, 1984: Jeux de cadres et dialectique outil-objet. Thèse d'Etat, Université de Paris 7.

ITZCOVICH, Horacio (coord.), Moreno, Beatriz, Novembre, Andrea y Becerril, María Mónica. El abecé de... La Matemática Escolar. Las prácticas de enseñanza en el aula. Aique Educación. (2007)

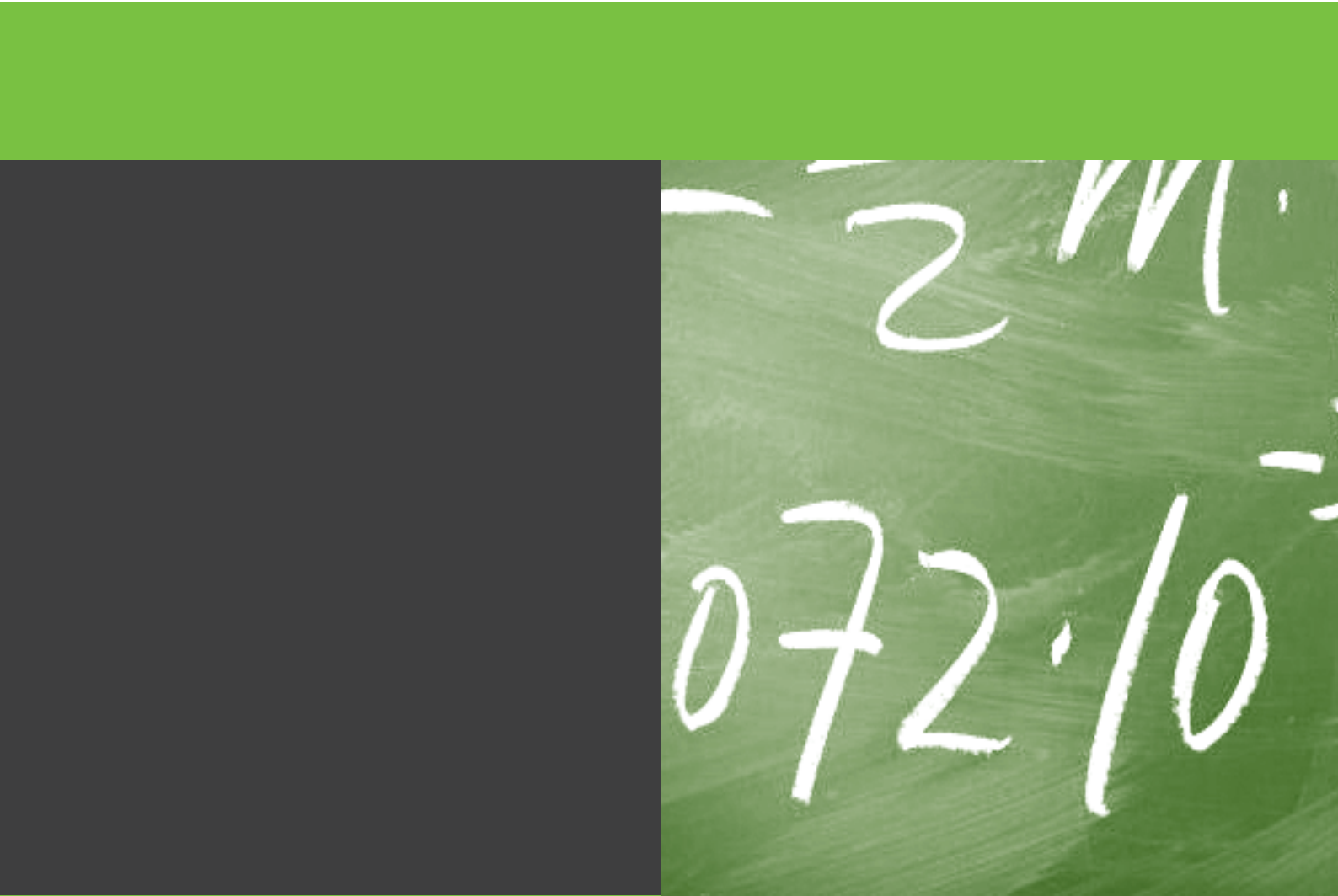
PANIZZA, Mabel, 2010. Generalization and Control in Algebra. Proceedings of CERME 6, January 28th-February 1st 2009, Lyon France © INRP 2010. Disponible en www.inrp.fr/editions/cerme6, marzo de 2012.

YACKEL, Erna. Explanation, justification and argumentation in mathematics classrooms. Purdue University Calumet. En: Proceedings of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (25th, Utrecht, Holanda, 12 al 17 de Julio de 2001). Volúmenes 1-4. Obtenido en http://didmat.dima.unige.it/miur/miur_dima/G/STORIA_DI_UNA_RICERCA/YACKEL.PDF, febrero de 2012.

YACKEL, Erna, Cobb, Paul. Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*.

Vol. 27, No. 4 (Jul., 1996), p. 458-477.

YACKEL, Erna, Cobb, Paul (1996). Sociomathematical norms, argumentation and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22 390-408.



ARGENTINA
UN PAIS CON BUENA GENTE

DiNIECE Dirección Nacional de
Información y Evaluación
de la Calidad Educativa

Ejemplar de distribución gratuita. Prohibida su venta.