<u>Escuela</u>: CENS Juan de Garay.

<u>Docente</u>: Sánchez, Viviana Edith.

<u>Año</u>: 2°   <u>Divisiones</u>: 1° y 2°

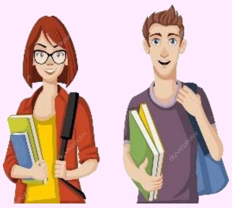
<u>Nivel</u>: Secundario para adultos.

<u>Turno</u>: Noche.

<u>Área Curricular</u>: Matemática.

<u>Guía N°</u>: **10**

<u>Título</u>: *Polinomios. Operaciones. Regla de Ruffini. Teorema del resto.*



Hasta el momento, hemos sumado, restado y multiplicado polinomios. En la presente Guía dividiremos polinomios y trabajaremos con dos resultados muy importantes, a saber, la Regla de Ruffini y el Teorema del Resto. ¡Manos a la obra!

DIVISIÓN DE POLINOMIOS:

Comenzaremos por recordar las **partes de la división**:

$$\begin{array}{l|l} \text{Dividendo} & \text{Divisor} \\ \hline & \text{Cociente} \\ \text{Resto} & \end{array}$$

Como así también el algoritmo de la división:

$$\textbf{Dividendo} = \textbf{Divisor} \cdot \textbf{Cociente} + \textbf{Resto}$$

Al momento de dividir polinomios se deben dar previamente las siguientes condiciones:

- ✓ El grado del polinomio dividendo debe ser **mayor o igual** que el grado del polinomio divisor.
- ✓ El polinomio dividendo debe estar **completo y ordenado** en forma decreciente.

- ✓ El polinomio divisor debe estar **ordenado** en forma decreciente.

Se pueden presentar los siguientes casos:

- **División de monomios:** En este caso simplemente se dividen los coeficientes (números), se aplica regla de los signos y propiedad "cociente o división de potencias de igual base: $\mathbf{x^m : x^n = x^{m-n}}$ " en la parte literal.

  Veamos un ejemplo:

  $$-64\,x^3 : 8\,x^2 = (-64 : 8)\,x^{3-2} = \mathbf{-8\,x}$$

  También lo puedes encontrar escrito de la siguiente manera: $\dfrac{-64\,x^3}{8\,x^2} = -8x$

- **División entre un polinomio y un monomio:** Para dividir un polinomio por un monomio, se aplica la propiedad distributiva de la división respecto de la suma o la resta: "$(\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) : \mathbf{c} = \mathbf{a} : \mathbf{c} \pm \mathbf{b} : \mathbf{c}$".

  En este caso, si $P(x)$ es un polinomio el cual se desea dividir en un monomio $Q(x)$, debemos dividir cada término de $P(x)$ en $Q(x)$. Esto es, se divide cada coeficiente de cada término de $P(x)$ en el coeficiente de $Q(x)$, aplicando regla de los signos y propiedad "cociente de potencias de igual base" en la parte literal.

  Veamos un ejemplo: Sean $P(x) = 10x^3 - 5x^2 + 15x$ y $Q(x) = 5x$

  $$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{10x^3 - 5x^2 + 15x}{5x} = \frac{10x^3}{5x} - \frac{5x^2}{5x} + \frac{15x}{5x} = \mathbf{2x^2 - x + 3}$$

- **División entre polinomios:** Para dividir dos polinomios, veremos el paso a paso en el siguiente ejemplo:

  Sean $P(x) = x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20$ y $Q(x) = x^2 + 3x - 2$, calculemos $P(x) : Q(x)$

  1) Colocamos los polinomios igual que en la división de números

  $$x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 \;\underline{|\; x^2 + 3x - 2 \quad}$$

  2) Se divide el primer monomio del dividendo por el primer monomio del divisor. El resultado se pone en el cociente

  $$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & \underline{x^2 + 3x - 2} \\ & x^2 \end{array}$$

3) Se multiplica el cociente por el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot x^2 = x^4 + 3x^3 - 2x^2$$

Como hay que restar: $x^4 + 3x^3 - 2x^2$ al dividendo, tal y como hacíamos con las resta de polinomios, consideramos su opuesto, es decir: $\mathbf{-x^4 - 3x^3 + 2x^2}$ y **sumamos**:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2} \color{red}{-x^4 - 3x^3 + 2x^2} & x^2 \\ \cline{1-1} \quad \color{red}{-5x^3 - 9x^2} & \end{array}$$

4) Se baja el término siguiente "$30x$" y se divide como en el paso dos, el primer monomio del dividendo "$-5x^3$" por el primer monomio del divisor "x^2"

$-5x^3 : x^2 = \color{red}{-5x}$ y se coloca $-5x$ en el cociente:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2} -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 \color{red}{- 5x} \\ \cline{1-1} \quad -5x^3 - 9x^2 \color{red}{+ 30x} & \end{array}$$

5) Se multiplica $-5x$ por el divisor $x^2 + 3x - 2$ y el producto obtenido se resta del dividendo:

$$(x^2 + 3x - 2) \cdot (-5x) = -5x^3 - 15x^2 + 10x$$

Consideramos su opuesto: $\mathbf{5x^3 + 15x^2 - 10x}$ y sumamos:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2} -x^4 - 3x^3 + 2x^2 & x^2 - 5x \\ \cline{1-1} \quad -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\ \quad \color{red}{5x^3 + 15x^2 - 10x} & \\ \cline{1-1} \qquad \color{red}{6x^2 + 20x} & \end{array}$$

6) Se baja el último término "-20", y se divide, como en los pasos 2 y 4:

$6x^2 : x^2 = 6$ y se coloca 6 en el cociente:

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{- x^4 - 3x^3 + 2x^2} & x^2 - 5x + 6 \\ \quad -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\ \quad \underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} & \\ \qquad\quad 6x^2 + 20x - 20 & \end{array}$$

7) Se multiplica por 6 el divisor y el producto obtenido se resta del dividendo: $(x^2 + 3x - 2) \cdot 6 = 6x^2 + 18x - 12$, nuevamente consideramos el opuesto: $-6x^2 - 18x + 12$ y sumamos

$$\begin{array}{l|l} x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 30x - 20 & x^2 + 3x - 2 \\ \cline{2-2} \underline{- x^4 - 3x^3 + 2x^2} & x^2 - 5x + 6 \\ \quad -5x^3 - 9x^2 + 30x & \\ \quad \underline{5x^3 + 15x^2 - 10x} & \\ \qquad\quad 6x^2 + 20x - 20 & \\ \qquad\quad \underline{- 6x^2 - 18x + 12} & \\ \qquad\qquad\quad 2x - 8 & \end{array}$$

Como $2x$ no se puede dividir por x^2, la división se ha terminado. Así obtenemos el polinomio cociente (resultado): $C(x) = x^2 - 5x + 6$ y el polinomio resto $R(x) = 2x - 8$.

Cada vez que realices una división, puede utilizar el algoritmo de la división para comprobar si el resultado obtenido es correcto.

Ejercicio 1: Resuelve las siguientes divisiones

a) $72x^4 : 9x =$

b) $-165x^{10} : 5x^8 =$

c) $(4x^6 + 2x^5 - 2x^4) : 2x^2 =$

d) $(2x^6 + 10x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 6) : 2x^5 =$

e) $(x^4 - x^2 + x + 17) : (x + 4) =$

f) $(2x^3 - 9x^2 + 4x + 10) : (2x - 5) =$

REGLA DE RUFFINI:

Para calcular los coeficientes (números) del cociente de una división de un polinomio, por otro de la forma $\mathbf{x+a}$ se adopta una disposición práctica conocida con el nombre de "Regla de Ruffini".

Es importante tener presente que: $x-a=x+(-a)$

Veamos en qué consiste, con un ejemplo: Dados los polinomios $P(x)=3x^4-4x^2+8$ y $Q(x)=x+2$. Calculemos $P(x):Q(x)$ aplicando la Regla de Ruffini.

Para ello debemos:

1. Completar y ordenar el polinomio dividendo.
2. Escribimos, en la primera fila, los coeficientes del polinomio dividendo.
3. En la segunda fila a la izquierda, se escribe el opuesto de $\mathbf{a}$ que es $\mathbf{-2}$, en este caso.
4. En la tercera fila se escriben los coeficientes que se van obteniendo de la siguiente manera:
   - El primer coeficiente de la tercera fila se repite tal y como está en la primera, es decir **3**.
   - Calculamos $(-2)\cdot 3=-6$, luego anotamos en la segunda fila -6 debajo de 0 y sumamos $-6+0=\mathbf{-6}$.
   - Ahora multiplicamos dicho resultado por -2, esto es, $(-2)\cdot(-6)=12$. Lo anotamos debajo de 4 y sumamos $-4+12=\mathbf{8}$.
   - Calculamos $(-2)\cdot 8=-16$, anotamos debajo de 0 y sumamos $0-16=\mathbf{-16}$.
   - Calculamos $(-2)\cdot(-16)=32$, anotamos debajo de 8 y sumamos, finalmente obtenemos $\mathbf{40}$.

$$\begin{array}{r|rrrr|r}
 & 3 & 0 & -4 & 0 & 8 \\
-2 & & -6 & 12 & -16 & 32 \\
\hline
 & 3 & -6 & 8 & -16 & \boxed{40}
\end{array}$$

RESTO

5. Ya estamos en condiciones de proporcionar el cociente y el resto de dicha división. $R(x)=40$ es el resto y $C(x)=3x^3-6x^2+8x-16$ es el cociente que se construye con un **grado menor**, respecto al grado del dividendo, y con los coeficientes obtenidos en la tercera fila, excepto el último que es el resto.

Ejercicio 2: Calcula el cociente y el resto de las siguientes divisiones aplicando Regla de Ruffini

a) $(4x^3+5x^2-x+12):(x+2)=$

b) $(4x^3+5x^2-x+12):(x-2)=$

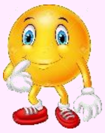
c) $(x^2 - 3x^4 + 5) : (x + 1) =$

d) $(x^2 - 3x^4 + 5) : (x - 1) =$

TEOREMA DEL RESTO:

"Si dividimos un polinomio $\mathbf{P(x)}$ *en un binomio de la forma* $(\mathbf{x + a})$ *el resto de la división se puede obtener calculando el* *<u>valor numérico</u>* *del polinomio* $\mathbf{P(x)}$ *para* $\mathbf{x = -a}$ ***, es decir a cambiada de signo****".*

$$\mathbf{P(-a) = resto\ de\ la\ división}$$



¿Cuál es la utilidad de este teorema?

Con el teorema del resto podemos calcular el resto de una división sin tener que hacerla, siempre que dividamos un polinomio por un binomio de la forma $(\mathbf{x + a})$.

<u>Veamos un ejemplo</u>:

Dados los polinomios $P(x) = 2x^2 + 3x - 2$ y $Q(x) = x - 2$ calculemos $P(x) : Q(x)$ sin hacer la división tradicional, sino aplicando el "teorema del resto", ya que están dadas las condiciones para hacerlo.

Para ello, deberemos identificar $\mathbf{a}$, en nuestro ejemplo, como $Q(x) = x - 2$, $\mathbf{a = -2}$

Ahora calculemos el valor numérico de $P(x)$ para $\mathbf{x = 2}$ (opuesto de a), esto es:

$$P(2) = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 - 2 = 2 \cdot 4 + 6 - 2 = \mathbf{12}$$

De este modo, utilizando el teorema del resto, podemos decir que el resto de $P(x) : Q(x)$, que indicaremos con $R(x)$ es igual a 12, esto es $R(x) = 12$.

<u>Ejercicio 3</u>: Calcula el resto de las siguientes divisiones aplicando el teorema del resto

a) $(-x^5 - 3x^3 + 4x + 7) : (x - 3) =$

b) $(2x^6 - x^3 + x^2 - 3) : (x + 1) =$

c) $(-5x^8 + 3x^2 - x + 6) : (x - 1) =$

<u>Criterios de evaluación</u>:

- ✓ Correcta presentación.
- ✓ Buena ortografía, coherencia y respeto por el orden de los ejercicios.
- ✓ Buena interpretación de los conceptos.
- ✓ Desarrollo de todas las actividades propuestas.
- ✓ Esfuerzo en el trabajo.

<u>Directora</u>: Graciela Inés Pérez.

<u>Profesora:</u> Sánchez Viviana Edith.