Propuesta pedagógica n° 3- Fines I – 2020

Escuela Secundaria Capitán de Fragata Carlos María Moyano

***Docente:** Silvana Andrea Benega*

***Espacio curricular :** Matemática – 2° año*

Título de propuesta: Potencia y radicación . Propiedades.

Contacto: WhatsApp 2644108117

Potencia

¿Qué es una potencia? Una potencia cuya base es un número entero y cuyo exponente es un número natural, es un producto de factores iguales.

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a$
el producto se hace n veces

La base, a, es el factor que se repite. El exponente, n, indica el número de veces que se repite la base.

Ejemplos:

$3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$

$(-2)^4 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$

$0^2 = 0 \cdot 0$

$4^0 = 1$ (este es un caso especial, ya que no podemos multiplicar un número por sí mismo 0 veces)

Signo de una potencia

Al calcular potencias de base un número entero, presta atención al signo de la base y al exponente. También debes distinguir a qué número exactamente está afectando la potencia.

No es lo mismo -3^4 que $(-3)^4$

En general cualquier potencia de un número positivo será positiva. Y el opuesto de esa potencia será siempre negativo. Si la base es negativa y el exponente par o cero, el valor de la potencia será positivo. Pero si la base es negativa y el exponente es impar, el valor de la potencia será negativo.

Ejemplos:

$3^4 = 81$

$3^3 = 27$

$(-2)^8 = 256$

$(-2)^9 = -512$

$2^8 = 256$

$-2^8 = -256$ (se trata del opuesto de la potencia anterior)

$5^0 = 1$

$-5^0 = -1$ (de nuevo el opuesto)

Operaciones con potencias

Potencia de productos y cocientes:

Para hacer el producto de dos números elevado a una misma potencia tienes dos caminos posibles, cuyo resultado es el mismo: Puedes primero multiplicar los dos números, y después calcular el resultado de la potencia: $(\mathbf{4 \cdot 5})^{\mathbf{4}} = \mathbf{20^4} = \mathbf{160000}$ *O bien puedes elevar cada número por separado al exponente y después multiplicar los resultados.*
$(\mathbf{4 \cdot 5})^{\mathbf{4}} = \mathbf{4^4 \cdot 5^4 = 256 \cdot 625 = 160000}$ *De forma análoga puedes proceder si se trata del cociente de dos números elevado a la misma potencia.*

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = 1{,}5^4 = 5{,}0625$$

$$\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{3^4}{2^4} = \frac{81}{16} = 5{,}0625$$

$$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n \quad y \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplos:

$(2\cdot3)^3 = 6^3 = 216$

$(2\cdot3)^3 = 2^3\cdot3^3 = 8\cdot27 = 216$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = 3^2 = 9$$

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 = \frac{6^2}{2^2} = \frac{36}{4} = 9$$

Observa que de las dos formas obtienes el mismo resultado. Ahora bien, no siempre será igual de sencillo de las dos formas.

Así que piensa de antemano qué método va a ser más conveniente para realizar el cálculo.

Producto de potencias de igual base

Observa el siguiente ejemplo: $2^3 * 2^4 = (2 * 2 * 2) * (2 * 2 * 2) = 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 * 2 = 2^7$ *Es decir, el resultado de multiplicar potencias de igual base es una potencia con la misma base, y cuyo exponente es la suma de los exponentes de las potencias iniciales.*

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Ejemplos:

$5^4 \cdot 5^7 = 5^{4+7} = 5^{11}$

$(-2)^5 \cdot (-2)^6 = (-2)^{5+6} = (-2)^{11}$

$x^2 \cdot x^8 = x^{2+8} = x^{10}$

Cociente de potencias de igual base

Veamos cómo se haría un cociente de potencias de igual base:

$$\frac{5^7}{5^3} = \frac{5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5 * 5}{5 * 5 * 5} = \frac{5 * 5 * 5 * 5}{1} = 5^4$$

Observa que el resultado de dividir dos potencias de igual base es otra potencia con la misma base, y en donde el exponente es la resta de los exponentes iniciales.

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

Ejemplos:

$\frac{6^9}{6^2} = 6^{9-2} = 6^7$

$\frac{(-5)^{13}}{(-5)^4} = (-5)^{13-4} = (-5)^9$

$\frac{7^4}{7^4} = 7^{4-4} = 7^0 = 1$

$\frac{x^{23}}{x^{20}} = x^{23-20} = x^3$

Potencia de una potencia

Una potencia cuyo exponente es un número natural equivale a la multiplicación repetida de la base tantas veces como indica el exponente. ¿Qué es entonces la potencia de una potencia? Observa el siguiente ejemplo: $(2^4)^3 = 2^4 * 2^4 * 2^4 = 2^{4*4*4} = 2^{3*4} = 2^{12}$

Es decir, el resultado de calcular la potencia de una potencia es una potencia con la misma base, y cuyo exponente es el producto de los dos exponentes.

Ejemplos:

$(3^4)^2 = 3^{4 \cdot 2} = 3^8$

$\left[(-5)^3\right]^6 = (-5)^{3 \cdot 6} = (-5)^{18}$

$(y^4)^8 = y^{4 \cdot 8} = y^{32}$

$$(a^n)^m = a^{n \bullet m}$$

Radicales

Definición *Llamamos raíz n-ésima de un número dado a al número b que elevado a n nos da a.*

$$\sqrt[n]{a} = b \Leftrightarrow b^n = a$$

Un radical es equivalente a una potencia de exponente fraccionario en la que el denominador de la fracción es el índice del radical y el numerador de la fracción es el exponente el radicando.

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}}$$

$$\sqrt[3]{8} = 2 \text{ por ser } 2^3 = 8$$

$$\sqrt[3]{5} = 5^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$$

Propiedades

Raíz de un producto *La raíz n-ésima de un producto es igual al producto de las raíces n-ésimas de los factores.*

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{a \cdot b} = (a \cdot b)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n}} \cdot b^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\sqrt[3]{2 \cdot 5} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{5}$$

$$\sqrt[7]{a^2 \cdot b^4} = \sqrt[7]{a^2} \cdot \sqrt[7]{b^4}$$

Raíz de un cociente *La raíz n-ésima de un cociente es igual al cociente de las raíces n-ésimas del dividendo y del divisor.*

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{a^{\frac{1}{n}}}{b^{\frac{1}{n}}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[5]{3}}$$

$$\sqrt[5]{\frac{a^4}{b^3}} = \frac{\sqrt[5]{a^4}}{\sqrt[5]{b^3}}$$

Raíz de una potencia *Para hallar la raíz de una potencia, se calcula la raíz de la base y luego se eleva el resultado a la potencia dada.*

$$\sqrt[n]{a^p} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

Demostración

$$\sqrt[n]{a^p} = a^{\frac{p}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^p = \left(\sqrt[n]{a}\right)^p$$

$$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = \left(\sqrt[5]{2}\right)^3$$

$$\sqrt[3]{x^7} = \left(\sqrt[3]{x}\right)^7$$

Raíz de una raíz *La raíz n-ésima de la raíz m-ésima de un número es igual a la raíz nm-ésima de dicho número.*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

$$\sqrt[5]{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[15]{2}$$

Demostración

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \left(a^{\frac{1}{m}}\right)^{\frac{1}{n}} = a^{\frac{1}{n\cdot m}} = \sqrt[n\cdot m]{a}$$

Actividades

1– Escribe en forma de potencia:

a) $7\cdot7\cdot7\cdot7\cdot7$

b) $(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)\cdot(-5)$

c) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$

d) $\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}\cdot\frac{-1}{2}$

2– Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) -2^2 b) $(-2)^2$

c) -2^0 d) $(-2)^0$

3– Calcula el valor de las siguientes potencias:

a) -3^3 b) $(-3)^3$

c) -3^2 d) $(-3)^2$

4– ¿Son iguales las siguientes potencias?

a) 9^2 y 3^4

b) $(5^2)^2$ y 25^2

5– Escribe en forma de potencia de una potencia:

a) $7^2\cdot7^2\cdot7^2\cdot7^2\cdot7^2$

b) $(-2)^4\cdot(-2)^4\cdot(-2)^4$

6– Escribe en forma de potencia de una potencia:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

7– Calcula los siguientes productos. Expresa el resultado en forma de potencia:

a) $3^5\cdot3^2$

b) $(-7)^5\cdot(-7)^6$

c) $2^4\cdot2^3\cdot2$

d) $x^4\cdot x^{10}$

8– Escribe en forma de potencia de una potencia:

a) $\left(\frac{1}{3}\right)^5\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^5$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^3$

9- Escribe en forma de potencia de una potencia:

a) $7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2 \cdot 7^2$

b) $(-2)^4 \cdot (-2)^4 \cdot (-2)^4$

10- Calcula los siguientes cocientes. Expresa el resultado en forma de potencia:

a) $\frac{5^6}{5^2}$ b) $\frac{(-2)^{12}}{(-2)^5}$

c) $\frac{3^7}{3^7}$ d) $\frac{x^8}{x^2}$

1 1. Escribe los siguientes radicales como potencia de exponente fraccionario:

a) $\sqrt[5]{3}$ $\sqrt[5]{3} = 3^{\frac{1}{5}}$

b) $\sqrt[5]{x^3}$ $\sqrt[5]{x^3}$

1 2. Escribe las siguientes potencias como radicales:

a) $7^{\frac{1}{2}}$ $7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$

b) $5^{\frac{2}{3}}$ $5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$