

-Escuela: Agrotécnica Gonzalo A. Doblas

-Docente: Raúl Castro

-Curso: 4° Año 1° y 2° División – Ciclo Orientado

-Turno: Mañana

-Área Curricular: Matemática

-Título de la Propuesta: Expresiones Algebraicas

Operaciones con Polinomios.

Hemos llamado polinomio formal en una indeterminada a una expresión de la forma:

$$P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

Si los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ son números reales, decimos que es un polinomio real formal en x , siendo x la indeterminada.

Designamos P_R al conjunto de polinomios reales formales y P_Q al conjunto de polinomios racionales formales.

En el conjunto P_R definimos algunas operaciones siguiendo reglas similares a las de las operaciones en $\mathbb{R}$.

Adición en P_R

Consideren los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Consideremos dos polinomios del mismo grado, completos y ordenados en forma descendente.

$$P = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 7$$

$$Q = -3x^3 + 4x^2 + 4x + 2$$

$$P + Q = 1x^3 + 7x^2 - 1x + 9$$

Debemos considerar que los términos se pueden sumar siempre y cuando tengan el mismo grado, de lo contrario no será posible sumar los diferentes términos. También se observa en el ejemplo 1 que se aplican las reglas para los $\mathbb{R}$ (dos números del mismo signo se suman, mientras dos números de distinto signo se restan y el signo del resultado será el del número con mayor valor numérico).

Se suman o restan (dependiendo del signo de cada término) las partes numéricas de términos del mismo grado. Y el término resultante será del mismo grado.

Ejemplo 2. Consideremos para este caso, dos polinomios de distinto grado como pueden ser:

$$\begin{array}{r} P = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \\ R = \quad 5x^2 - 3x - 4 \\ \hline P + R = 4x^3 + 8x^2 - 8x + 3 \end{array}$$

El grado del polinomio resultante es el mismo del polinomio con mayor grado.

Sustracción en P_R

La diferencia entre un polinomio P y un polinomio Q es el polinomio que se obtiene sumando a P el opuesto de Q (recuerda que el opuesto de Q se obtiene cambiando todos los signos de los términos).

$$\begin{array}{r} P = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \\ Q = -3x^3 + 4x^2 + 4x + 2 \\ \hline P - Q \end{array} \qquad \begin{array}{r} P = 4x^3 + 3x^2 - 5x + 7 \\ (-Q) = 3x^3 - 4x^2 - 4x - 2 \\ \hline 7x^3 - 1x^2 - 9x + 5 \end{array}$$

Como se observa en el ejemplo al utilizar el opuesto de Q, la forma de resolver es igual a la suma polinómica, y de la misma forma se debe resolver en los casos donde tenemos polinomios de distinto grado.

Primera Actividad

Clasificar las expresiones según la cantidad de términos:

$$P = 7x + 5x^3 - 0x^2 \dots\dots\dots$$

$$Q = 4x^2 - 2x^0 + 5 \dots\dots\dots$$

$$S = 9 + 3x^5 - 6x^2 + 2x^3 \dots\dots\dots$$

Segunda Actividad

a) Ordena y completa los siguientes polinomios:

$$P = 3 + 8x^2 + 5x^3 - 9x \dots\dots\dots$$

$$Q = 5x^2 - 3x^3 + 4x - 6x^4 \dots\dots\dots$$

b) Con los polinomios completos y ordenados, resuelve las siguientes operaciones:

$$P + Q =$$

$$P - Q =$$

$$Q - P =$$

Multiplicación de un polinomio por un número real.

Para el conjunto P_R definimos una ley de composición externa: multiplicación de un polinomio por un número real,

$$P_R \times \mathbb{R} \longrightarrow P_R$$

Que a todo par del producto $P_R \times \mathbb{R}$ hace corresponder como resultado un elemento de P_R , es decir, un polinomio real formal.

Ejemplo.

$$(3x^3 + 5x^2 - 7x + 4) \cdot (-2)$$

Aplicamos la propiedad distributiva:

$$(3x^3 + 5x^2 - 7x + 4) \cdot (-2) = (3x^3) \cdot (-2) + (5x^2) \cdot (-2) + (-7x) \cdot (-2) + (4) \cdot (-2) = \\ = -6x^3 - 10x^2 + 14x - 8$$

Tercera Actividad

Utilizando los polinomios P y Q de la actividad 2 (completos y ordenados), resuelve los siguientes productos:

$$P \times (4)$$

$$Q \times (-3)$$

Multiplicación de polinomios.

En el conjunto P_R de los polinomios definimos la multiplicación que anotamos en la forma usual: $P(x) \cdot Q(x)$

La multiplicación de polinomios se realiza de acuerdo con las reglas y propiedades de la multiplicación de números reales aunque la indeterminada x no sea un número real.

Ejemplo1. Multiplicamos monomios.

$$x^2 \cdot x^3 = x^{2+3} = x^5$$

Este tipo de expresiones se utilizaron con las propiedades de las potencia de igual base, a diferencia de estos ejercicios, en estos casos tenemos como base una incógnita (x).

Siguiendo la misma línea multiplicaremos dos monomios que tienen una parte numérica distinta de la unidad.

$$(3x^2) \cdot (-2x^4) = (3) \cdot (-2) (x^2 \cdot x^4) = -6 x^6$$

Analizando este caso en particular, observamos que las partes numéricas se multiplicaron respetando las reglas de los reales, mientras que los exponentes de la parte literal se suman debido a que los términos contienen la misma parte literal.

Si esta operación la llevamos a dos expresiones con mas términos, el procedimiento será similar a la multiplicación de números con muchas cifras.

Ejemplo con números

$$3825$$

x 7 1 3

$$1\ 1\ 4\ 7\ 5 \longrightarrow 3\ 8\ 2\ 5 \cdot 3u$$

$$3\ 8\ 2\ 5 \longrightarrow 3\ 8\ 2\ 5 \cdot 1d$$

$$2\ 6\ 7\ 7\ 5 \longrightarrow 3\ 8\ 2\ 5 \cdot 7c$$

$$2\ 7\ 2\ 7\ 2\ 2\ 5 \longrightarrow 3\ 8\ 2\ 5 \cdot 7\ 1\ 3$$

Ejemplo con polinomios

$$P = 4x^3 + 5x^2 - 3x + 9$$

$$Q = 3x^2 + 4x - 2$$

$$-8x^3 - 10x^2 + 6x - 18 \longrightarrow P \cdot (-2)$$

$$16x^4 + 20x^3 - 12x^2 + 36x \longrightarrow P \cdot (4x)$$

$$12x^5 + 15x^4 - 9x^3 + 27x^2 \longrightarrow P \cdot (3x^2)$$

$$12x^5 + 31x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 42x - 18 \longrightarrow P \cdot Q$$

Cuarta Actividad

Realiza los pasos necesarios para resolver el producto entre los polinomios P y S.

$$P = 5x^2 + 3x^3 - 2$$

$$S = 3x^2 - 4x$$

Director: Agrónomo Roberto Anderson García