Escuela: Agrotécnica Cornelio Saavedra

Docente: Rolando Gastón Olarte

Año: QUINTO SEGUNDA

Ciclo: Superior

Turno: Mañana

Área Curricular: Matemática

Título de la propuesta: POLINOMIOS

REPASO GRAL DE POLINOMIOS

TEMA INICIAL N°1:

1) MONOMIOS
2) SUMA Y RESTA DE MONOMIOS
3) PRODUCTO DE MONOMIOS
4) DIVISION DE MONOMIOS
5) POLINOMIOS
6) CANTIDAD DE TERMINOS DE UN POLINOMIO
7) GRADO DE UN POLINOMIO Y POLINOMIOS INCOMPLETOS
8) COEFICIENTE DE UN POLINOMIO
9) SUMA DE UN POLINOMIO
10) RESTA DE UN POLINOMIO
11) PRODUCTO DE UN POLINOMIO
12) DIVISION DE UN POLINOMIO
13) REGLA DE RUFFINI
14) TEOREMA DEL RESTO

ESTOS SON LOS TEMAS DE REPASO PRINCIPALES ANTES DE FACTORIZAR A DESARROLLAR EN ESTAS SEMANAS SUBSIGUIENTES

ESTA ES LA TEORIA COMPLETA Y LA EJERCITACION PARA ESTA SEMANA

EJERCITACION DEL TEMA UNO 1 DESDE EL EJERCICIO 1 AL 38

BIBLIOGRAFIA:

☆ **Monomios:** Un monomio es una "expresión algebraica entera" que consta de 1 solo término, justamente por eso se las llaman <u>monomios</u> (mono="uno", nomio="término").

<u>Ejemplos de monomios</u>: ★ X^2 ★ 6 ★ $-3m^3n$

- **Suma y resta de monomios:** Sólo puedo sumar o restar monomios en los que coincida la variable (que suele ser la letra "x" pero bien podría usarse cualquier letra) y el exponente de la variable.

<u>Por ejemplo</u>:

$$\begin{array}{r} 4X^5 \\ +\ 5X^5 \\ \hline 9X^5 \end{array} \qquad \begin{array}{r} -\ 7X^3 \\ 3X^3 \\ \hline 4X^3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a^5 \\ +\ 3m^5 \\ \hline 2a^5+3m^5 \end{array} \longrightarrow$$

En este caso no puedo sumar ambos monomios ya que tienen distinta variable

- **Producto de monomios:** Para multiplicar dos monomios tengo que seguir tres pasos básicos:

1. Tengo que multiplicar los signos de los monomios (ya saben, si los signos son iguales el resultado es positivo y si los signos son distintos el resultado es negativo).
2. Una vez que ya sé el signo, tengo que multiplicar los números.
3. Por último multiplicamos las variables, para lo cual tenemos que aplicar la propiedad del producto de potencias de igual base, que dice que si multiplico dos potencias de exponentes distintos, el resultado es una potencia cuyo exponente es la suma de los exponentes que teníamos.

<u>Ejemplo</u>: $4X^3 \cdot (-3X^4) = -12X^7$

☆ EL Signo: Positivo por Negativo = Negativo
☆ EL número: $4 \cdot 3 = 12$
☆ Las Variables: $X^3 \cdot X^4$ es X^7 -> se suman los exponentes (4+3=7)

- **División de monomios:** Es similar al producto.

1. La regla de los signos es la misma.
2. Los números en lugar de multiplicarse se dividen.
3. Las Variables siguen la propiedad de la división de potencias de igual base, que dice que en lugar de sumar los exponentes como en el producto ahora los tengo que restar.

<u>Ejemplo</u>: $\dfrac{9X^8}{3X^6} = 3X^2$

☆ EL Signo: Positivo por Positivo = Positivo
☆ EL número: $9 \div 3 = 3$
☆ Las Variables: $X^8 \div X^6$ es X^2 porque se restan los exponentes (8–6=2)

☆ **Polinomios:** Son sumatorias indefinidas de al menos un monomio. Como si fueran "Cadenas de Monomios", o sea, monomios sumados y restados entre sí. Como mínimo un polinomio debe tener un monomio y no hay un máximo es decir que podría tener un polinomio de 3 monomios o 3 términos, y también podría tener uno de 25 términos o más..

<u>Ejemplo</u>: $P(X) = 4X^4 - 3X^2 + 2X - 5$ → Este es un polinomio de 4 términos.

☆ **<u>Cantidad de términos de un polinomio</u>**:

$P(X) = 4X^4 - 3X^2 + 2X - 5$ ⇨ P(X) es un **polinomio** y como tiene **4 monomios** se lo llama **cuatrinomio**.

$Q(X) = X + 3$ ⇨ Q(X) es otro **polinomio**, pero como tiene **2** términos o monomios, se lo llama **binomio**.

De la misma manera, si el **polinomio** tuviera tres términos, se lo llama **trinomio**, etc.

☆ **<u>Grado de un polinomio y polinomios incompletos</u>:** El **grado** de un **polinomio** de una variable es el exponente más alto al que está elevado la variable. Un **polinomio** está <u>incompleto</u> cuando no están todos los exponentes desde 0 hasta el más alto (cuando faltan uno o más **monomios** para que esté completo).

<u>Ejemplos</u>:

$P(X) = 4X^3 - 5X^2 + 4X + 3$ → P(X) es un polinomio de **grado 3 y es Polinomio Completo.**

$R(X) = X^3 + 2X + 3$ → R(X) es un polinomio de **grado 3 y está Incompleto** (le falta el monomio de X^2).

$Q(X) = X^7 - 5$ → Q(X) es un polinomio de **grado 7 y está Incompleto** (le faltan muchos monomios).

$S(X) = X - 5$ → S(X) es un polinomio de **grado 1 y es Polinomio Completo.**

Ediciones Logik... Libros de Matemática a Medida

Coeficientes de un polinomio:

Veamos cuáles son los coeficientes de $P(X) = 4X^3 - 5X^2 + 4X + 3$

$$P(X) = \boxed{4}X^3 \; \boxed{-5}X^2 + \boxed{4}X + \boxed{3}$$

Coeficientes

En particular se llama coeficiente principal al coeficiente del término de mayor exponente y se llama término independiente al coeficiente que corresponde al exponente "Cero", es decir el número que está "suelto" (en nuestro ejemplo el 3).

Coeficiente Principal

$$P(X) = \boxed{4}X^3 - 5X^2 + 4X + \boxed{3}$$

Término Independiente

- **Suma de polinomios:**
  - *Para sumar dos **polinomios** tengo que escribirlos ordenados (desde el mayor exponente hasta el menor) y completos (los **monomios** que falten los completo con 0) y luego tengo que sumar por separado los **monomios** de ambos **polinomios** que tengan el mismo exponente.*

☆ Ejemplo: Calcular P(X) + Q(X)

$P(X) = 5X^3 + 3X^4 + 3X^2 + 1$
$Q(X) = X^3 + 3X + 4X^2 + 6$

Primero los escribo ordenados y completos:

$$\begin{array}{lrrrrr} P(X) = & 3X^4 + & \boxed{5X^3} + & 3X^2 + & 0X + & 1 \\ Q(X) = & & \boxed{1X^3} + & 4X^2 + & 3X + & 6 \\ \hline & 3X^4 + & \boxed{6X^3} + & 7X^2 + & 3X + & 7 \end{array}$$

Como falta el monomio de la X lo completé con 0

Sumamos los monomios por separado
Por ejemplo, $5X^3 + 1X^3 = 6X^3$

Finalmente: $P(X) + Q(X) = 3X^4 + 6X^3 + 7X^2 + 3X + 7$

☆ **Resta de polinomios:**

- *En la resta hay que proceder de la misma manera, con la diferencia que hay que restar los **monomios** por separado, en lugar de sumar.*

Ejemplo: Calcular P(X) - Q(X) (P(X) y Q(X) son los mismos que en el ejemplo anterior)

Primero los escribo ordenados y completos:

$$\begin{array}{lrrrrr} P(X) = & 3X^4 + & 5X^3 + & 3X^2 + & 0X + & 1 \\ -\; Q(X) = & & 1X^3 + & 4X^2 + & 3X + & 6 \\ \hline & 3X^4 + & 4X^3 - & 1X^2 - & 3X - & 5 \end{array}$$

(restamos los monomios por separado)

Finalmente: $P(X) - Q(X) = 3X^4 + 4X^3 - 1X^2 - 3X - 5$

☆ ¿Que pasa con los grados de los polinomios cuando los sumo o los resto?

- *En primer lugar, vale aclarar que **se pueden sumar o restar polinomios de grados diferentes** y en segundo **lugar el grado del resultado es el grado del polinomio de mayor grado**, es decir que si por ejemplo, sumo o resto un polinomio de grado 5 con otro de grado 3, el resultado será un polinomio de grado 5 (Salvo que ambos polinomios sean del mismo grado y tengan el mismo coeficiente principal y en la suma o resta se anulen los términos que le dan el grado a los polinomios, con lo cual el grado en la suma o resta será menor al grado de lo polinomios sumados o restados)*

Producto de polinomios: Para multiplicar **polinomios**, el proceso es similar al de multiplicar números de varias cifras, sólo que en el caso de los **polinomios**, en lugar de trabajar con cifras, trabajamos con **monomios**.

Ejemplo: Calcular P(X) . Q(X) Siendo: $P(X) = 5X^3 + 3X^4 + 3X^2 + 1$ y $Q(X)$ $4X^2 + 6$

$$
\begin{array}{r}
3X^4 + 5X^3 + 3X^2 + 0X + 1 \\
\cdot \quad 4X^2 + 6 \\
\hline
12X^6 + 20X^5 + 12X^4 + 0X^3 + 4X^2 \quad\quad\quad\quad \\
+ \quad 18X^4 + 30X^3 + 18X^2 + 0X + 6 \\
\hline
\mathbf{12X^6 + 20X^5 + 30X^4 + 30X^3 + 22X^2 + 0X + 6}
\end{array}
$$

Primero se multiplica cada monomio de P(X) por $\mathbf{4X^2}$

Luego multiplicamos cada monomio de P(X) por **6**

Por último sumamos los monomios y llegamos al resultado final.

Otro Ejemplo

$$
\begin{array}{r}
\mathbf{-2X^4 + 4X^3 - 3X^2 + 2X - 2} \\
\cdot \quad \mathbf{X + 3} \\
\hline
\mathbf{-2X^5 + 4X^4 - 3X^3 + 2X^2 - 2X} \quad\quad \\
+ \quad \mathbf{-6X^4 + 12X^3 - 9X^2 + 6X - 6} \\
\hline
\mathbf{-2X^5 - 2X^4 + 9X^3 - 7X^3 + 4X - 6}
\end{array}
$$

Fíjense que acomodo cada monomio debajo del monomio correspondiente de la fila anterior. (por ejemplo el que me da X^4 lo ubico debajo del que tenga X^4 en la otra fila)

¿Que pasa con los grados de los polinomios cuando los multiplico? Con el producto también se cumple que se pueden multiplicar polinomios de grados diferentes y **el grado del resultado de la multiplicación es LA SUMA DE LOS GRADOS DE LOS POLINOMIOS MULTIPLICADOS**. Ejemplo: Si multiplico un polinomio de grado 5 por otro de grado 6, el resultado va a ser un polinomio de grado 11. Con la división, en cambio, como es la operación inversa al producto, cuando divido dos polinomios, **el grado de la división es la resta de los grados de los polinomios divididos.**

División de polinomios: Vamos a ver como se hace la división de polinomios directamente de un ejemplo. Supongamos que tenemos que hacer la división: $(12X^3 - 5X^2 + 14X + 9) \div (4X + 1)$

Busco el 1° término del cociente para que multiplicado por **4X** me dé $\mathbf{12X^3}$ ⇨ Multiplico este término por el divisor. ⇨ Restamos:

$$
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
\hline
 & 3X^2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \ \text{Por}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\ \ 12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \\
\hline
\ \ 0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 &
\end{array}
$$

Busco el 2° término del cociente para que multiplicado por **4X** me dé $\mathbf{8X^2}$ ⇨ Multiplico este término por el divisor. ⇨ Restamos:

$$
\begin{array}{l|l}
\ \ 12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \ -2X \\
\hline
\ \ 0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\ \ 12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \ -2X \ \text{Por} \\
\hline
\ \ 0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
\ \ -8X^2 - 2X &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\ \ 12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \ -2X \\
\hline
\ \ 0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-\ -8X^2 - 2X & \\
\hline
\ \ 0X^2 + 16X + 9 &
\end{array}
$$

Busco el 2° término del cociente para que multiplicado por **4X** me dé **16X** ⇨ Multiplico este término por el divisor. ⇨ Restamos:

$$
\begin{array}{l|l}
\ \ 12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \ -2X \ +4 \\
\hline
\ \ 0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-\ -8X^2 - 2X & \\
\hline
\ \ 16X + 9 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\ \ 12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
\ \ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \ -2X \ +4 \ \text{Por} \\
\hline
\ \ 0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
\ \ -8X^2 - 2X & \\
\hline
\ \ 16X + 9 & \\
\ \ 16X + 4 &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|l}
\ \ 12X^3 - 5X^2 + 14X + 9 & 4X + 1 \\
-\ 12X^3 + 3X^2 & 3X^2 \ -2X + 4 \\
\hline
\ \ 0X^3 - 8X^2 + 14X + 9 & \\
-\ -8X^2 - 2X & \\
\hline
\ \ +16X + 9 & \\
-\ \ 16X + 4 & \\
\hline
\ \ 5 &
\end{array}
$$

El resultado de la división es: $3x^2-2+4$. Y el Resto 5

☆ **Regla de Ruffini:** Es un método muy simple y rápido para hacer ciertas divisiones de polinomios.
Puedo aplicar Ruffini cuando el divisor es $X \pm$ "A" ("A" puede ser cualquier número Real).

Veamos un ejemplo: $(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2)$

Primero tenemos que escribir el dividendo completo y ordenado $4X^4 + 0X^3 + 2X^2 - 5X + 8$
(Fíjense que como faltaba el término de X^3 lo completé poniendo $0X^3$)

Después armo la siguiente tabla:

	4	0	2	-5	8
-2					
	4				

Son los coeficientes del dividendo

Es el número del divisor **cambiado de signo**

Y la división se resuelve así:

	4	0	2	-5	8
-2					
	4				

Bajo el primer coeficiente

	4	0	2	-5	8
-2		-8			
	4				

Multiplico $-2 \cdot 4 = -8$

	4	0	2	-5	8
-2		-8			
	4	-8			

Sumo $0 + (-8) = -8$

	4	0	2	-5	8
-2		-8	+16		
	4	-8			

Vuelvo a multiplicar

Y de esta manera repito los pasos anteriores hasta terminar:

	4	0	2	-5	8
-2		-8	+16	-36	+82
	4	-8	+18	-41	90

Ahora nos queda ver cuál es el resultado de la división y cual es el resto:

	4	0	2	-5	8
-2		-8	+16	-36	+ 82
	4	-8	+ 18	-41	90

Son los coeficientes del resultado (4, -8, +18, -41)

Es el resto de la división (90)

Entonces: $(4X^4 + 2X^2 - 5X + 8) \div (X + 2) = 4X^3 - 8X^2 + 18X - 41$ (Y de resto 90)

Fíjense que para armar el resultado de la división, escribimos los términos uno por uno.
El primer coeficiente que tenemos es un 4, y como dividimos un polinomio de grado 4 por uno de grado 1 el resultado es un polinomio de grado 3 (o sea que se restan los grados). Entonces el primer coeficiente que tenemos, que es un 4, corresponde al término de X^3 y el segundo coeficiente que tenemos (-8) corresponde al término de X^2. De la misma manera, el 18 corresponde al término de X, y el -41 es el término independiente.

☆ **Teorema del Resto:** El Teorema del Resto sirve para calcular el resto de una división sin hacer la división. Y si ya hicimos la división, nos sirve para verificar si la hicimos bien. Lo único que hay que hacer es **reemplazar las X del dividendo por el "número del divisor" cambiado de signo,** y hacer la cuenta.

En el ejemplo anterior teníamos la cuenta: $\boxed{4X^4 + 2X^2 - 5X + 8} \div (X + 2)$

Este es el dividendo y hay que remplazar todas las X por -2

Reemplazando nos queda:

$4.(-2)^4 + 2.(-2)^2 - 5.(-2) + 8 = 2.16 + 2.4 + 10 + 8 = 64 + 8 + 8 + 10 + 8 = 90$

Finalmente 90 es el Resto de la división, y como ven, nos da lo mismo que cuando hicimos la división por Ruffini.

Libros de Matemática a Medida

Realizar las siguientes operaciones con monomios:

1) $3X^3 - 4X^3$

2) $5X^5 + 4X^5$

3) $4m^2 - 3m^2 + 5m^2$

4) $2n^3 - 7n^3 + 3n^3$

5) $2n^4 - n^4 + 5n^4$

6) $(2n) \cdot (-3n^3)$

7) $2X \cdot (-1X^4)$

8) $(-4X^3) \cdot (-3X^2)$

9) $(-1m^3) \cdot 8m$

10) $(-5m^3) \cdot (-8m^3)$

11) $\left(\frac{3}{2}X^3\right) \cdot \left(-\frac{8}{3}X^2\right)$

12) $\left(-\frac{1}{2}m^5\right) \cdot (-4m)$

13) $-3X \cdot \left(\frac{5}{3}X\right)$

14) $\left(-\frac{1}{2}m^3\right) \cdot \left(2X^3\right)$

15) $\left(-\frac{1}{2}Y^5\right) \div \left(-\frac{1}{8}Y^3\right)$

16) $\left(50X^4\right) \div \left(-\frac{5}{2}X^3\right)$

17) $\left(-\frac{9}{5}X\right) \div \frac{3}{10}X$

18) $\left(-\frac{18}{5}n^3\right) \div \left(-\frac{9}{10}n^2\right)$

19) $\left(40X^7\right) \div \left(-\frac{8}{3}X^7\right)$

20) $\frac{3}{2}m^4 \div \frac{1}{2}m^3$

Realizar las siguientes sumas y retas de polinomios:

21) $(4X^4 + 3X^3 + 2X^2 - X + 1) + (5X^2 - 2X + 3)$

22) $(-X^4 + 5X^2 - 3X - 1) - (5X^4 + 3X^3 - X^2 - 2X + 3)$

23) $(-3X^4 - 4X^3 - 1) + (-X^4 + 4X^3 + 2X^2 + X + 1)$

24) $(4X^2 + 6X + 3) - (5X^4 - 5X^2 + 4X - 3)$

25) $(X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 6X^2 - 3X + 4) - (-X^5 + 3X + 4)$

26) $(2X^5 - 2X^4 + X^3 - 4X^2 + 4) + (-3X^5 + 3X^4 - 2X^3 + 5X^2 + 3X - 5)$

27) $(7X^5 + 8X^4 - 6X^3 + 2X^2 - 3) - (-6X^5 - 7X^4 + 7X^3 - X^2 + X + 4)$

28) $(2X^5 - 4X^4 - X^3 - 3X^2 + 2) + (-2X^5 + 3X^4 + X^3 + 3X^2 + X - 2)$

29) $(X^3 - 5X^2 + 2X - 3) - (2X^3 + 5X^2 - 2X - 3)$

30) $(5X^5 + 3X^4 - 2X^3 - 7X^2 - 6) + (-5X^5 - 3X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 4X + 2)$

31) $(X^2 + 2XY + Y^2) + (X^2 - Y^2)$

32) $(a^2 + ab^2 + a^2b) - (b^2 + a^2b + ab^2)$

33) $(2ac + 2ab - bc) - (3ab - 2bc)$

34) $(4X^5 + 3X^4Y + 2Y^5) - (3X^5 - Y^5) - (2X^4Y - 1 + X^5)$

35) $(2m^3 - 3n^3) + (4m^2n - 6mn^2) - (m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3)$

36) $(a^3 + b^2 + ab + b + a^2) + (b^3 - a^2 + ab + a - b^2) - (a + 2ab + b)$

37) $(2abc + ab - bc) - (ab - bc + abc) + (ab^2 - abc + a^2b)$

38) $(a^2X + b^2Y - aX^2 - bY^2 + a^2 + b^2) - (a^2X + a^2 - bY^2 - aX^2 + bY)$

-99-