Escuela: Bachillerato José Manuel Estrada

Docente: Gremoliche Patricia

Área Curricular: Matemática Aplicada

Título de la propuesta: función exponencial, función logarítmica y propiedades de logaritmos.

1) FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA.

Función exponencial

La función exponencial es de la forma $f(x) = a^x$ tal que $a > 0$, $a \neq 1$

El valor a se llama base de la función exponencial.

Propiedades:

• El dominio es R.

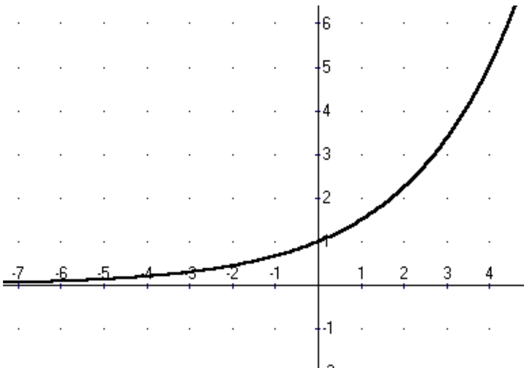
• El recorrido es $[0; +\infty]$

• La función es continua en R.

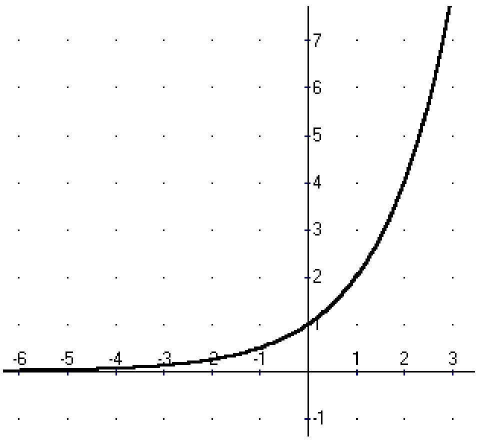
• $f(0) = 1$

. La función representada es:

$Y = (3/2)^x$

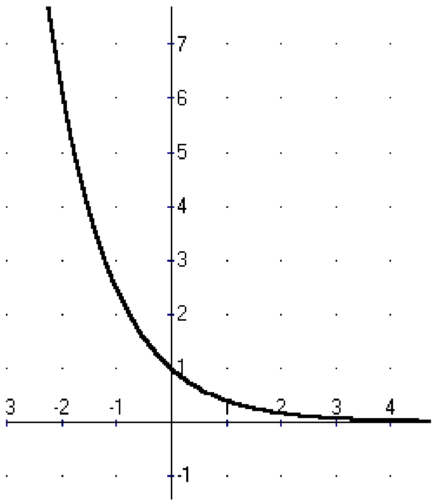


Si $a > 1$ la función es creciente



$Y = 2^x$

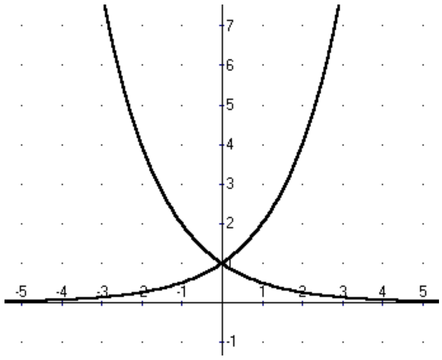
Si $0 < a < 1$ la función es decreciente



$y = (2/5)^x$

Las gráficas de las funciones $f(x) = a^x$, $g(x) = (1/a)^x$ son simétricas respecto del eje de las ordenadas (eje Y).

$Y = (1/2)^x$ $\qquad$ $Y= 2^x$



Ejercicio 1:

Estudia y representa la función $f(x) = 4^x$.

Es una función exponencial de base $a = 4$

El dominio es R

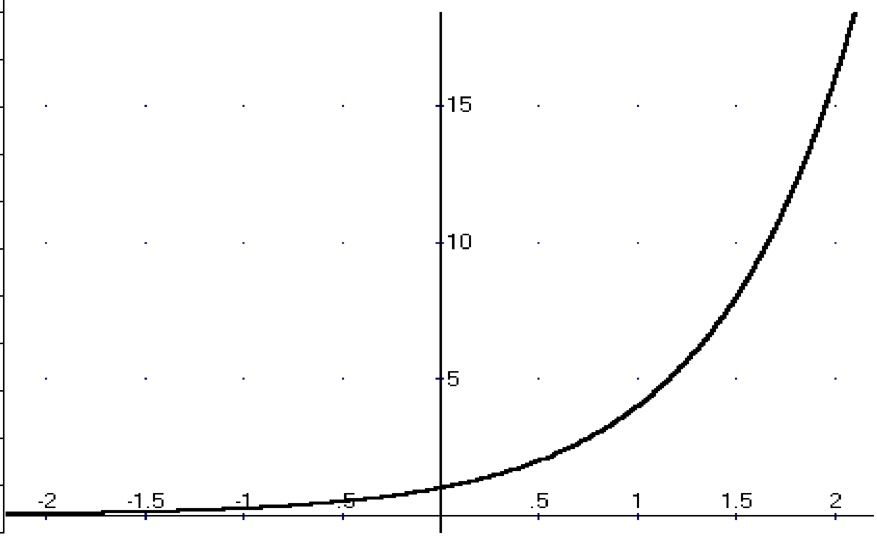
El recorrido es $[0,+\infty]$

Es una función creciente.

La función es continua en R

Construimos una tabla de valores de la función:

X	$Y = 4^X$
-2,5	0,03
-2	0,06
-1,5	0,125
-1	0,25
-0,5	0,5
0	1
0,5	2
1	4
1,5	8
2	16
2,5	32



Función logarítmica

Sea $a > 0$, $a \neq 1$

Definimos logaritmo de base a de x y lo representamos loga x al valor y loga x = y tal que: $a^y = x$, es decir, la operación inversa de la exponencial.

Propiedades del logaritmo y la función logarítmica

• El dominio de la función logarítmica es [0, +∞]

• El recorrido de la función logarítmica es R.

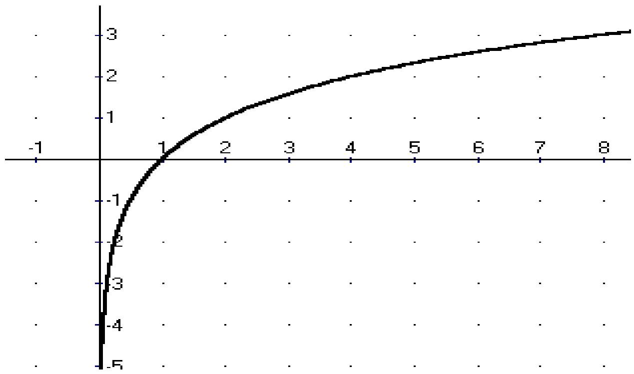
• La función es continua en [0,+∞]

• Si loga x = loga y, entonces, x = y

• loga 1 = 0

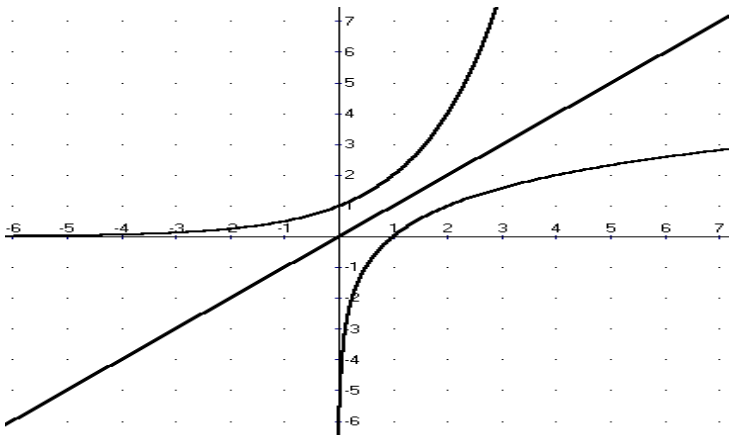
• $\log_a a^p = p$

• La función f(x) = loga x, y la función $g(x) = a^x$ son inversas, por tanto son simétricas respecto de la recta y = x



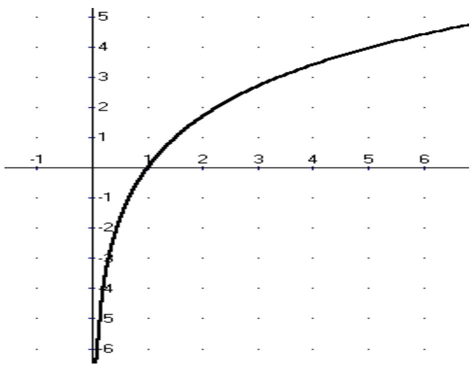
$y = \log_2 X$

$Y = 2^X$ $\quad$ $Y = X$



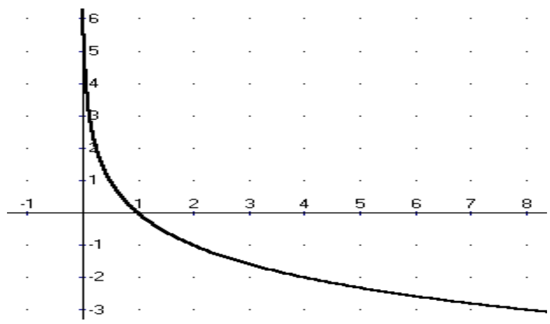
$y = \log_2 X$

Si a > 1 la función es creciente



$y = \log_{1,5} x$

Si 0 < a < 1 la función es decreciente



$y = \log_{0,5} x$

2) PROPIEDADES DE LOGARITMOS

Es necesario que recordemos la definición de logaritmo:

El logaritmo en base b de un número a se representa por $log_b(a)$ y es el número c que cumple $b^c = a$:

$$\log_b(a) = c \Leftrightarrow b^c = a$$

- El número b es la **base** del logaritmo. Tiene que ser un real positivo distinto de 1.
- El número a es el **argumento** del logaritmo.
- El número c es el **logaritmo** en base b de a.

Si la base es 10, no es necesario escribir la base.

Logaritmo de un producto

El logaritmo de un producto de factores es la suma de los logaritmos de los factores:

$$\log(a \cdot b) = \log(a) + \log(b)$$

Ejemplo:

$$\log_5(15) = \log_5(5 \cdot 3) =$$

$$= \log_5(5) + \log_5(3) = 1 + \log_5(3)$$

Logaritmo de un cociente

El logaritmo de un cociente es el logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador:

$$\log\left(\frac{a}{b}\right) = \log(a) - \log(b)$$

Ejemplo:

$$\log_3\left(\frac{3}{5}\right) = \log_3(3) - \log_3(5) =$$

$$= 1 - \log_3(5)$$

Logaritmo de una potencia

El logaritmo de una potencia es el logaritmo de la base de la potencia multiplicado por el exponente:

$$\log(a^b) = b \cdot \log(a)$$

Ejemplo:

$$\log_2(8) = \log_2(2^3) =$$

$$= 3 \cdot \log_2(2) = 3 \cdot 1 = 3$$

Importante:

Las bases de los logaritmos para aplicar las propiedades tienen que ser iguales.

Ejemplo:

Podemos sumar logaritmos con base común:

$$\log_2(5) + \log_2(3) = \log_2(15)$$

No podemos sumar logaritmos con base distinta:

$$\log_2(5) + \log_{10}(3) \neq \log_2(15)$$

3. Ejemplos de aplicación

Ejemplo 1

$$\log(3) + \log(5)$$

Solución:

La suma de logaritmos es el logaritmo del producto:

$$\log(3) + \log(5) =$$

$$= \log(3 \cdot 5) =$$

$$= \log(15)$$

Ejemplo 2

$$3 \cdot \log(2)$$

Solución:

El número 3 pasa al argumento como un exponente:

$$3 \cdot \log(2) =$$

$$= \log(2^3) =$$

$$= \log(8)$$

Ejemplo 3

$$3 \cdot \log(2) + 2 \cdot \log(3)$$

Solución:

Antes de utilizar la propiedad de la suma de logaritmos, tenemos que introducir los coeficientes (3 y 2) como exponentes de los argumentos:

$$3 \cdot \log(2) + 2 \cdot \log(3) =$$

$$= \log(2^3) + \log(3^2) =$$

$$= \log(8) + \log(9) =$$

$$= \log(8 \cdot 9) = \log(72)$$

Ejemplo 4

$$\frac{1}{2} \cdot \log(9)$$

Solución:

Recordad que el exponente 1/2 es la raíz cuadrada:

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Por tanto, tenemos el logaritmo de una raíz cuadrada:

$$\frac{1}{2} \cdot \log(9) =$$

$$= \log\left(9^{\frac{1}{2}}\right) =$$

$$= \log(\sqrt{9}) = \log(3)$$

Ejemplo 5

$$8 \log_5(\sqrt{5})$$

Solución:

En lugar de introducir el 8 como un exponente, vamos a extraer el exponente 1/2 del argumento:

$$8 \log_5(\sqrt{5}) =$$

$$= 8 \log_5(5^{\frac{1}{2}}) =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{2} \log_5(5) =$$

$$= 4 \log_5(5) = 4$$