Escuela: CENS Juan de Garay.

Docentes: López Juan de Dios y Sánchez, Viviana Edith.

Año: 3° Divisiones: 1° y 2°

Nivel: Secundario para adultos.

Turno: Noche.

Área Curricular: Matemática.

Guía N°: **4**

Título: *Números Complejos. Producto y Cociente de números complejos.*

En la guía anterior estuvimos trabajando algunas operaciones con números complejos, ellas son **adición** y **sustracción**, en la presente guía, estudiaremos **producto** y **cociente** de números complejos, para ello será importante que tengas presente las **potencias de la unidad imaginaria** y el concepto de **conjugado** de un número complejo.

MULTIPLICACIÓN DE NÚMEROS COMPLEJOS:

Para **multiplicar** dos números complejos en forma binómica, se aplica la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la suma o respecto de la resta.

En general:

Dados $z_1 = a + bi$ y $z_2 = c + di \implies z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di)$

$$= a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i + b \cdot d \cdot \mathbf{i^2}$$

$$= a \cdot c + a \cdot d \cdot i + b \cdot c \cdot i + b \cdot d \cdot (\mathbf{-1})$$

$$= a \cdot c - b \cdot d + (a \cdot d + c \cdot b)i$$

Por ejemplo: Dados $z_1 = 4 + 5i$ y $z_2 = 2 + 6i \implies z_1 \cdot z_2 = (4 + 5i) \cdot (2 + 6i)$

$$= 4 \cdot 2 + 4 \cdot 6 \cdot i + 5 \cdot 2 \cdot i + 5 \cdot 6 \cdot \mathbf{i^2}$$

$$= 8 + 24i + 10i + 30 \cdot (\mathbf{-1})$$

$$= 8 - 30 + (24 + 10)i = \mathbf{-22 + 34i}$$

Un **producto especial** es el que tiene lugar cuando se multiplica un **número complejo por su conjugado** que es igual a la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria.

En general:

Dado $z_1 = a + bi \Rightarrow \overline{z_1} = a - bi \Longrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = (a + bi) \cdot (a - bi)$

$$= a \cdot a - a \cdot b \cdot i + a \cdot b \cdot i - b \cdot b \cdot i^2$$

$$= a^2 - b^2 \cdot (-1) = \mathbf{a^2 + b^2}$$

Por ejemplo:

Dado $z_1 = 5 + 6i \Rightarrow \overline{z_1} = 5 - 6i \Longrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = (5 + 6i) \cdot (5 - 6i)$

$$= 5 \cdot 5 - 5 \cdot 6 \cdot i + 5 \cdot 6 \cdot i - 6 \cdot 6 \cdot i^2$$

$$= 5^2 - 6^2 \cdot (-1) = \mathbf{5^2 + 6^2} = \mathbf{25 + 36} = \mathbf{61}$$

Real Puro

DIVISIÓN DE COMPLEJOS:

Para **dividir** dos números complejos en forma binómica, se multiplica el dividendo y el divisor **por el conjugado de este último** y luego se resuelven las operaciones resultantes.

Ejemplos:

- ✓ Dados los números $z_1 = 2 + i$ y $z_2 = 3 - 4i \Rightarrow \overline{z_2} = 3 + 4i$ y

$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + i}{3 - 4i}$$

$$= \frac{2 + i}{3 - 4i} \cdot \frac{\mathbf{3 + 4i}}{\mathbf{3 + 4i}}$$

$$= \frac{(2 + i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)}$$

$$= \frac{2 \cdot 3 + 2 \cdot 4i + 3i + 4i^2}{3^2 + 4^2}$$

Aplicamos el producto especial:

Producto de un complejo por su conjugado

$$= \frac{6 \ + \ 8i \ + \ 3i \ - \ 4}{9 + 16} = \frac{2 + 11i}{25} = \boldsymbol{\frac{2}{25} - \frac{11}{25}i}$$

✓ Dados los números $z_1 = 5 - 2i$ y $z_2 = -6i \Rightarrow \overline{z_2} = 6i$ y

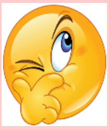
$$z_1 : z_2 = \frac{z_1}{z_2} = \frac{5 - 2i}{-6i}$$

$$= \frac{5 - 2i}{-6i} \cdot \boldsymbol{\frac{6i}{6i}}$$

$$= \frac{(5 - 2i) \cdot 6i}{6^2}$$

$$= \frac{5 \cdot 6i - 2 \cdot 6i^2}{6^2}$$

$$= \frac{30i + 12}{36} = \frac{12}{36} + \frac{30}{36}i = \boldsymbol{\frac{1}{3} + \frac{5}{6}i}$$



¿Pero qué ocurre si deseamos multiplicar o dividir números complejos expresados en forma cartesiana?

Simplemente representamos dichos números en su respectiva forma binómica y realizamos la operación. 

<u>Ejercicio 1</u>: Resuelve las siguientes multiplicaciones

a) $(-2 + 3i) \cdot (-2 - 3i) =$

b) $(4 - 5i) \cdot (-2 - i) =$

c) $(7 + 5i) \cdot (7 - 5i) =$

d) $(7 + 5i) \cdot (7 - 5i) =$

e) $(5\,,3)\cdot\,(4\,,1) =$

f) $(2\,,-1)\cdot\,(1\,,2) =$

g) $(3\,,2)\cdot\,(3\,,2) =$

<u>Ejercicio 2</u>: Completa la siguiente tabla

z	$\bar{z}$	$z\cdot\bar{z}$
$2+6\mathrm{i}$		
	$-1+\mathrm{i}$	
$5\mathrm{i}$		
	$-3-4\mathrm{i}$	
$1-2\mathrm{i}$		

<u>Ejercicio 3</u>: Resuelve las siguientes divisiones

a) $\frac{1-3\mathrm{i}}{2+2\mathrm{i}} =$

b) $\frac{-2+3\mathrm{i}}{-3-\mathrm{i}} =$

c) $\frac{3-\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} =$

d) $\frac{3-2\mathrm{i}}{3\mathrm{i}} =$

e) $\frac{1-2\mathrm{i}}{2+\mathrm{i}} =$

f) $\frac{5-3\mathrm{i}}{5+3\mathrm{i}} =$

g) $\frac{4+7\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} =$

CUADRADO Y CUBO DE UN COMPLEJO:

Para elevar al cuadrado o al cubo un complejo, se desarrolla el cuadrado o cubo de un binomio, en forma general:

- <u>Cuadrado de un binomio</u> (para una suma o resta)
  - ✓ $(m+n)^2 = m^2 + 2 \cdot m \cdot n + n^2$
  - ✓ $(m-n)^2 = m^2 - 2 \cdot m \cdot n + n^2$

- <u>Cubo de un binomio</u> (para una suma o resta)
  - ✓ $(m+n)^3 = m^3 + 3 \cdot m^2 \cdot n + 3 \cdot m \cdot n^2 + n^3$
  - ✓ $(m-n)^3 = m^3 - 3 \cdot m^2 \cdot n + 3 \cdot m \cdot n^2 - n^3$

Veamos algunos ejemplos:

- $(4+i)^2 = 4^2 + 2 \cdot 4 \cdot i + i^2 = 16 + 8i - 1 = 15 + 8i$
- $(3-6i)^2 = 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot (-6)i + (-6i)^2 = 9 - 36i + 36 \cdot (-1) = 9 - 36i - 36$

  $= -27 - 36i$
- $(4+i)^3 = 4^3 + 3 \cdot 4^2 \cdot i + 3 \cdot 4 \cdot i^2 + i^3 = 64 + 48i + 12 \cdot (-1) - i$

  $= 64 + 48i - 12 - i$

  $= 52 + 47i$
- $(3-6i)^3 = 3^3 + 3 \cdot 3^2 \cdot (-6i) + 3 \cdot 3 \cdot (-6i)^2 + (-6i)^3 = 27 - 162i + 54i^2 - 216i^3$

  $= 27 - 162i + 54 \cdot (-1) - 216 \cdot (-i)$

  $= 27 - 162i - 54 + 216i$

  $= -27 + 54i$

<u>Ejercicio 4</u>: Desarrolle las siguientes potencias

a) $(3-5i)^2 =$

b) $(2-5i)^2 =$

c) $(-1+3i)^3 =$

d) $(2-i)^3 =$

Criterios de evaluación:

- ✓ Correcta presentación.
- ✓ Buena ortografía, coherencia y respeto por el orden de los ejercicios.
- ✓ Buena interpretación de los conceptos.
- ✓ Desarrollo de todas las actividades propuestas.
- ✓ Esfuerzo en el trabajo.

Directora: Graciela Inés Pérez.

Profesores: López Juan de Dios y

Sánchez Viviana Edith.