Escuela: CENS Juan de Garay.

Docentes: López Juan de Dios y Sánchez, Viviana Edith.

Año: 3° Divisiones: 1° y 2°

Nivel: Secundario para adultos.

Turno: Noche.

Área Curricular: Matemática.

Guía N°: **2**

Título: *Números Complejos. Introducción. Expresión binómica y cartesiana de un complejo. Potencias de la unidad imaginaria. Opuesto, conjugado y módulo de un número complejo.*

Como sabemos, en $\mathbb{R}$ no podemos resolver raíces cuadras de números negativos, como por ejemplo $\sqrt{-1}$, ya que no existe ningún número real cuyo cuadrado sea igual a -1.

Para eso definimos el símbolo $\mathbf{i}$ para indicar un número tal que: $\mathbf{i^2 = -1}$ o lo que es equivalente a $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$.

Teniendo en cuenta la igualdad a partir de la cual lo definimos, y que este número no es real, podemos usarlo para expresar las soluciones que, no son números reales, de algunas ecuaciones:

Ejemplos:

$x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x_1 = i$ y $x_2 = -i$ ya que $i^2 + 1 = 0$ y $(-i)^2 + 1 = 0$

Definimos entonces un nuevo número, llamado **la unidad imaginaria**, cuyo cuadrado es igual a -1.

Dicho número pertenece a un nuevo conjunto numérico que estudiaremos a continuación, el conjunto de los números complejos.

CONJUNTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS:

A los números de la forma $a + bi$, donde a y b son números reales, los llamamos números complejos, generalmente usamos letras como z, r, s, u, v, etc. Para simbolizar a los números complejos, por ejemplo:

$$z = a + bi$$

a se llama la parte real de z

b se llama la parte imaginaria de z

A la parte real de z la simbolizamos Re(z) y a la parte imaginaria Im(z).

Estos es: $\mathrm{Re}(z) = a \quad y \quad \mathrm{Im}(z) = b$

Ejemplos:

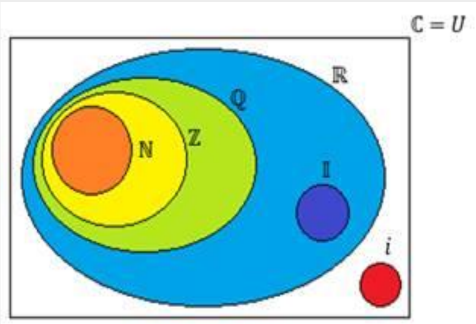
$z_1 = 2 - 3i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_1) = 2 \text{ y } \mathrm{Im}(z_1) = -3$

$z_2 = -3i = 0 - 3i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_2) = 0 \text{ y } \mathrm{Im}(z_2) = -3$

$z_3 = -4 = -4 + 0i \Rightarrow \mathrm{Re}(z_3) = -4 \text{ y } \mathrm{Im}(z_3) = 0$

- ✓ Los números como z_2, donde la parte real es cero reciben el nombre de **imaginarios puros**.
- ✓ Los números como z_3, donde la parte imaginaria es cero reciben el nombre de **real puro**.

Al conjunto de todos los números complejos lo designaremos con la letra $\mathbb{C}$ y está definido de forma tal que incluye a los números reales, representados por aquellos números complejos cuya parte imaginaria es cero, es decir, los reales puros.



Ejercicio 1: Completa la siguiente tabla

NÚMERO COMPLEJO	PARTE REAL	PARTE IMAGINARIA	¿Es un complejo real puro, imaginario puro o simplemente un número complejo?
$5 + 3i$			
	2	8	
	-4	-2	

	-1	3	
$2-3i$			
$5i$			
	0	4	
	4	0	
	0	0	

Hasta ahora sólo hemos estudiado una de las formas de representación de los números complejos: $z = a + bi$ llamada **expresión binómica**, pero… ¿Existirá otra forma de expresar a los números complejos?

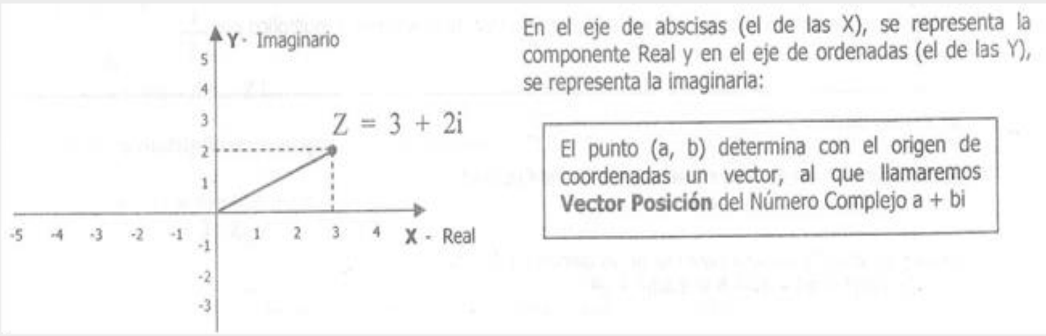
La respuesta es **sí**, existe otra forma de representación llamada **expresión cartesiana**, dado que los números complejos se representan gráficamente en el plano, a diferencia de los números reales, que se representan en la recta numérica. Por lo que a cada número complejo le corresponde un punto del plano, luego podemos expresar a z de la siguiente forma:

$z = (a, b)$, dicha forma de expresarlo recibe el nombre de expresión cartesiana de z.

Ejemplo:

Si $z = 3 + 2i$ (expresión cartesiana), entonces su expresión cartesiana es $z = (3,2)$

Luego si deseamos representarlo gráficamente lo realizamos de la siguiente forma:



Ejercicio 2: Expresa los números complejos del ejercicio 1 en forma cartesiana y luego grafícalos en el plano.

POTENCIAS DE LA UNIDAD IMAGINARIA:

A través de las propiedades de la potenciación en $\mathbb{R}$, conjunto de los números reales, se puede hallar la potencia enésima de la unidad imaginaria:

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 . i^1 = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^3 \cdot i^1 = -i \cdot i = -i^2 = -(-1) = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i^1 = 1 \cdot i = i$

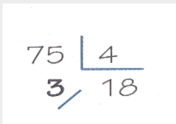
Si continuamos calculando potencias sólo aparecen los valores:

$$\{1, i, -1, -i\}$$

Por lo que para calcular la potencia enésima de i, es decir, i^n se procede de la siguiente manera:

Se **divide** n en **4**, dado que cada cuatro unidades se va ciclando o repitiendo.

Luego se toma a consideración el **resto de dicha división** que indicará a cuál de las **cuatro primeras potencias de i** es igual. Para ello veamos un ejemplo:

$i^{75} = i^{3} = -i$ pues 

<u>Ejercicio 3</u>: Realiza las siguientes potencias de i.

a) $i^{34} =$ b) $i^{64} =$ c) $i^{81} =$ d) $i^{107} =$

el tema potencia de **i** lo retomaremos cuando realicemos operaciones con números complejos.

CONJUGADO Y OPUESTO DE UN NÚMERO COMPLEJO:

<u>Definiciones</u>:

- ✓ Llamamos **conjugado** de un número complejo $z = a + bi$, y lo simbolizaremos $\bar{z}$, al complejo que tiene su parte real igual a z y su parte imaginaria opuesta. Es decir:

  $\bar{z} = a - bi$

  Por ejemplo, si

  $$z = -5 - 6i \Rightarrow \bar{z} = -5 + 6i$$

- ✓ Llamamos opuesto de un número complejo $z = a + bi$, y lo simbolizamos $-z$, al complejo que tiene su parte real y su parte imaginaria opuesta a z. Es decir:

$-z = -a - bi$

Por ejemplo, si

$$z = -5 - 6i \Rightarrow -z = 5 + 6i$$

MÓDULO DE UN NÚMERO COMPLEJO:

A cada número complejo $z = a + bi$ le está asociado un vector con origen en el punto $(0,0)$ y extremo en el punto (a, b) (expresión cartesiana de z). Por lo que se le puede hacer corresponder un vector a cada número complejo. El módulo de ese vector es a lo que le llamaremos módulo del complejo, en cuestión.

Definición: Llamaremos **módulo de un complejo** $z = a + bi$ y lo indicaremos $|z|$ al número real que se obtiene de calcular la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la parte real y la parte imaginaria.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejemplo:

$$z = 3 + 4i \Rightarrow |z| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

Ahora integremos lo aprendido a través del siguiente ejercicio

Ejercicio 4: Completa la siguiente tabla

Número complejo	OPUESTO	CONJUGADO	MÓDULO	Cambiar a forma binómica o cartesiana según corresponda
$z_1 = 3 - 4i$				
$z_2 = (0, -1)$				
$z_3 = -5 - 5i$				
$z_4 = -2$				
	$(-6, -2)$			

		$7 - i$		
				$(3,4)$
				$-2 - i$
		$(-1,7)$		

Criterios de evaluación:

- ✓ Correcta presentación.
- ✓ Buena ortografía, coherencia y respeto por el orden de los ejercicios.
- ✓ Buena interpretación de los conceptos.
- ✓ Desarrollo de todas las actividades propuestas.
- ✓ Esfuerzo en el trabajo.

Directora: Graciela Inés Pérez.

Profesores: López Juan de Dios y

Sánchez Viviana Edith.