GUIA N° 8 – Nivel Secundario.

Escuela CENS 249 "César Hermógenes Guerrero"

Docentes: Eliana Martin- Eugenia Molini

Curso: Tercer Año

Turno: Noche

Área Curricular: Matemática

Título de la Propuesta:" Función Exponencial y Logarítmica "

Objetivos:

- Adquirir y ejecutar el lenguaje propio de Matemática comprendiendo e interpretándolas situaciones problemáticas
- Adoptar una actitud crítica frente a una situación.

Contenidos

Definición de función Exponencial y Logarítmica, Representación gráfica de una función Exponencial y Logarítmica y sus principales diferencias.

Metodología

- Desarrollo y noción de vocabulario.
- Elaboración de definiciones y conceptos.
- Pensamiento crítico.

FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Funciones exponenciales.

Se llama *"exponencial"* a un número positivo elevado a una variable *x*, por ejemplo:

2^x, $(5.31)^x$, $(\pi)^x$

Aunque la función *exponencial* por excelencia en Matemáticas es e^x (siendo *e*=2.718281...), tal es así que a esta función se la suele expresar abreviadamente como exp(*x*), llamándola a secas "la *exponencial* de *x*".

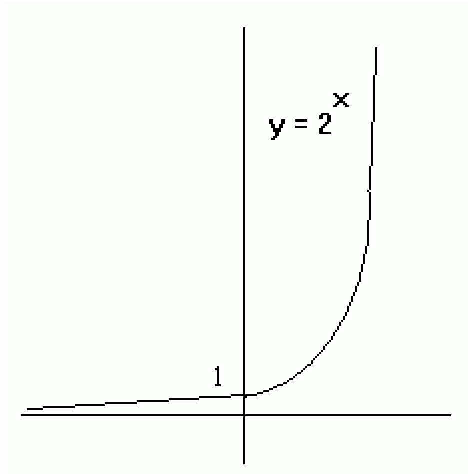
Pero en general una función exponencial tiene la forma:

$y = a^x$

siendo *a* un número positivo distinto de 0.

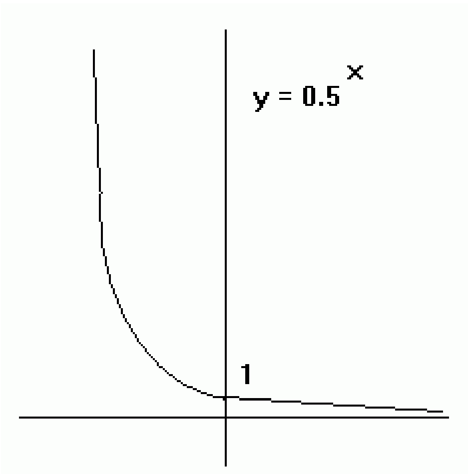
Para dibujar las gráficas de estas funciones conviene considerar dos casos: I) exponenciales con *a* > 1; y II) exponenciales con *a* < 1.

Función exponencial con *a*>1.



En esta gráfica puede apreciarse cómo la función exponencial es siempre positiva; cuando *x* tiende a $-\infty$ la función tiende a anularse, mientras que por la derecha crece muy rápidamente hacia ∞ (2 elevado a 20 es superior a un millón). Toda función exponencial con *a* mayor que 1 tiene una gráfica muy similar a ésta. A este caso pertenece la función $y = e^x$.

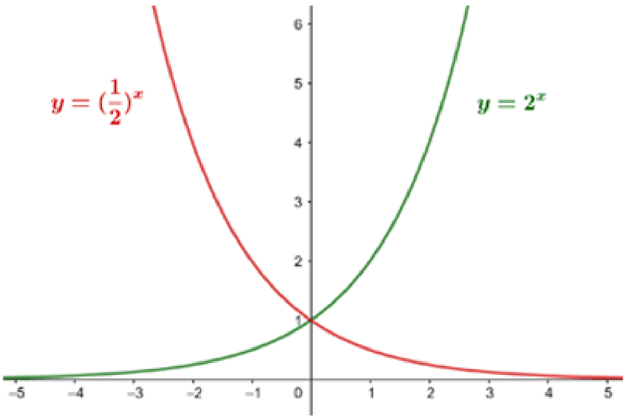
Función exponencial con a<1.



Como puede apreciarse en la gráfica, la función exponencial es siempre positiva, pero en este caso el comportamiento de la función es el opuesto al caso anterior: es cuando *x* tiende a ∞ cuando la función tiende a anularse, por contra, crece rápidamente para valores negativos de *x*.

Propiedades de la función exponencial

- Dominio: $\mathcal{R}$
- Recorrido: $\mathcal{R}$
- Es continua
- Los puntos (0, 1) y (1, a) pertenecen a la gráfica
- Es inyectiva ∀ a ≠ 1(ninguna imagen tiene más de un original).
- Creciente si a > 1
- Decreciente si a < 1
- Las curvas $\mathbf{y = a^x}$ e $\mathbf{y = (1/a)^x}$ son simétricas respecto del eje OY



Antes de empezar, f(0) = 2^0 = 1

Después de 1 hora f (1) = 2^1 = 2

Después de 2 horas f (2) = 2^2 = 4

En 3 horas f (3) = 2^3 = 8

Etc.

Funciones logarítmicas.

Decimos que *logaritmo* (base *a*) de un número positivo N es *z*, lo cual expresamos, $\log_a N = z$, si se verifica:

$a^z = N$

En otras palabras, el logaritmo (base *a*) del número positivo N es el exponente al que hay que elevar la base *a* para obtener ese número N

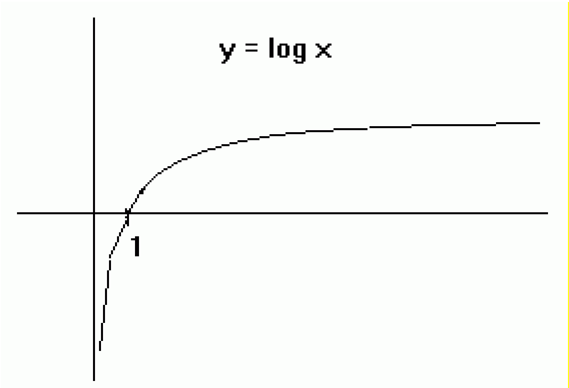
Por ejemplo, decimos que el Logaritmo decimal (base 10) de 100 es 2, puesto que $10^2=100$.

En el caso de que la base sea el número *e = 2,7182818...* se llama "logaritmo natural" o "logaritmo neperiano" (en honor del matemático John Neper), lo cual se suele denotar de una de estas formas:

Log N (sin poner la base), Ln N

En Matemáticas generalmente se utilizan logaritmos neperianos, y escasamente se utilizan logaritmos en otras bases. Veamos las propiedades de los logaritmos.

Función logaritmo (neperiano).



Podemos observar: (1) que sólo existe logaritmo para *x* positivo. (2) que para *x*=1 el logaritmo se anula, cosa que es lógica pues *e*° = 1 -y en general *N*° = 1-. (3) Para el rango (0, 1) el logaritmo es negativo. (4) Para *x* tendiendo a 0 el logaritmo se hace $-\infty$. Y (5) el logaritmo crece lentamente para valores positivos de *x*, y tiende a infinito lentamente cuando *x* tiende a infinito.

Función logarítmica. Se trata de la función cuya expresión genérica se puede apreciar en la imagen.

$$f(x) = \log_a x$$

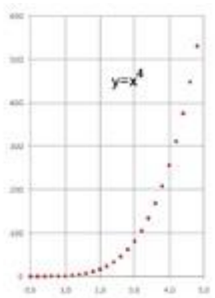
En estas funciones, a es la base, que tiene que ser positiva y diferente de 1. La forma oficial de leer esta ecuación es la siguiente: «la función de x es igual al logaritmo base a de x»..

Es importante mencionar que la función logarítmica es la función inversa de la función exponencial: aquella que se representa con la ecuación $f(x) = a^x$

Entre las principales características de una función logarítmica, podemos mencionar que su dominio (su conjunto de partida o inicial) son los números reales positivos. Se trata de una función continua, cuyo recorrido es R (las imágenes que se obtienen de aplicar la función corresponden a cualquiera de los elementos del conjunto formado por los números reales).

Las funciones logarítmicas, por otra parte, pueden ser crecientes o decrecientes, así como convexas o cóncavas, según el valor de la base. Para saber si son crecientes, basta con observar si a es mayor a 1; por otro lado, si es mayor a 0 y menor a 1, entonces es decreciente.

Continuando con las propiedades de la función logarítmica, podemos decir que en la gráfica siempre encontramos los siguientes dos puntos: (1, 0) y (a, 1), entendiendo estas duplas como valores en los ejes X e Y, o sea el horizontal y el vertical, respectivamente. La función logarítmica también se considera inyectiva.

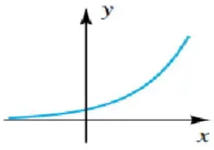
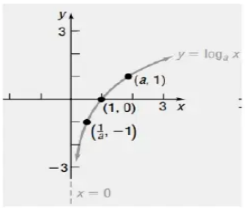
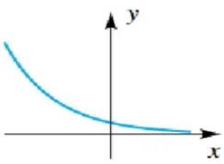
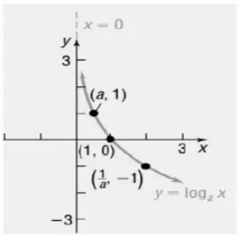


En el ámbito de las matemáticas, se conoce con el nombre de función inyectiva a aquélla en la cual a cada elemento del codominio le corresponde solamente uno del dominio. Dicho en otras palabras, en una función de este tipo, al que también pertenece la logarítmica, no se puede dar el caso de que más de un elemento del primer conjunto tenga la misma imagen.

Las funciones logarítmicas, en definitiva, son aquellas en cuya ecuación la variable es la base o argumento de un logaritmo. Para resolver estas ecuaciones, por lo general se trata de lograr la conversión de la ecuación logarítmica en otra que resulte equivalente pero que carezca de logaritmo.

En los casos que pueden representarse con la ecuación presente en la primera imagen, la conversión pone la base del logaritmo como la de una potencia elevada a la *x* e iguala este término a *y*. Por ejemplo, si tenemos una función de *x* en la cual la base es 2, para cada elemento del codominio deberemos buscar qué número es igual a él si lo elevamos al cuadrado.

CUADRO COMPARATIVO FUNCIÓN EXPONENCIAL Y FUNCIÓN LOGARÍTMICA	
FUNCIÓN EXPONENCIAL	FUNCIÓN LOGARÍTMICA
Terminología Función exponencial *f* con base a.	Terminología Función logarítmica *f* en base a
Definición $f(x) = a^x$ para todo x en IR, donde a > 0 y a ≠ 1	Definición $f(x) = \log_a x$ para todo x en IR donde a > 0 y a ≠ 1

Gráfica de *f* para a > 1  Función de crecimiento exponencial.	Gráfica de *f* para a > 1 
Gráfica de *f* para 0 < a < 1  Función de decaimiento exponencial	Gráfica de *f* para 0 < a < 1 

Actividades

1- De un ejemplo de Función Exponencial y de una Función Logarítmica.

2-Marque con una cruz aquellas Funciones que sean una función exponencial.

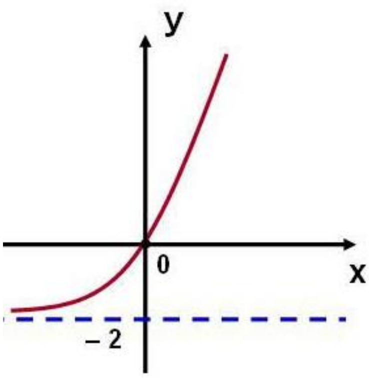
- $3x^2 + x + 3 = 10$
- $8x + 1 = F(x)$
- $x^2 = 81$
- $\log_3 81 = 4$
- $y = 1/2^x$

- $x - 2 = 0$
- $\log_7 49 = 2$
- $y = 2^x$

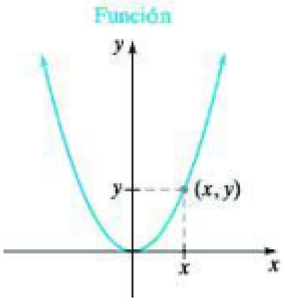
3-De un Ejemplo de Función Exponencial aplicado a la vida cotidiana.

4- Según las gráficas que se presentan a continuación, reconozca cuál de las mismas corresponde a una gráfica de tipo logarítmica.

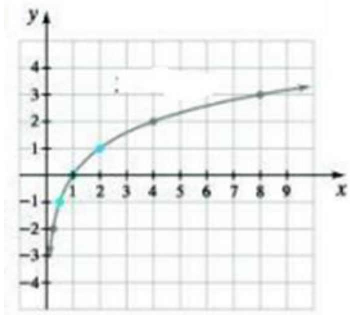
a)



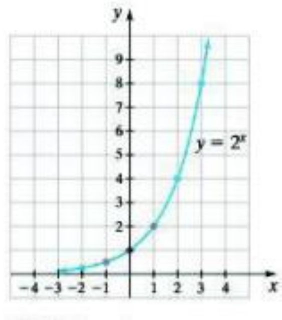
b)



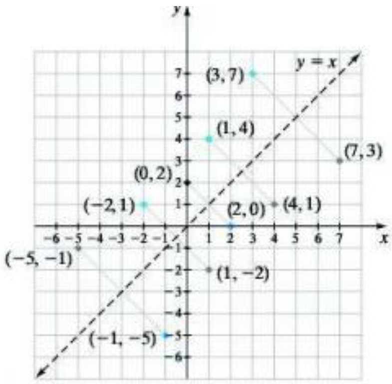
c)



d)



e)



Directora: Verónica Arredondo