# GUIA N°5

**Escuela**: Colegio Provincial Barrio Parque Rivadavia Norte

**Docente**: Ing. Civil BONDUEL, Ana Sofia

**Curso**: 6° año

**Área**: Matemática Aplicada.

**Contenido**:Polinomios. Factorización. Casos de factoreo. Método de Gauss. Regla de Ruffini. Raíces. Factorización de polinomios por medio de raíces.

## POLINOMIO

Un polinomio es una **expresión algebraica de sumas, restas y multiplicaciones ordenadas hecha de variables, constantes y exponentes**.
En álgebra, un polinomio puede tener más de una variable (x, y, z), constantes (números enteros o fracciones) y exponentes (que solo pueden ser números positivos enteros).

## Teorema de Gauss

El **teorema de Gauss** nos dice que las posibles raíces de un polinomio se obtienen mediante del cociente entre los divisores del término independiente y los divisores del coeficiente principal (coeficiente del término de mayor grado).
Por ejemplo, imaginemos que tenemos un polinomio de grado 4:

$$P(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

Sus posibles raíces serían todos los cocientes de cada divisor de el coeficiente e y cada divisor del coeficiente a:

$$Posibles\ \ raíces=\frac{Divisores\ \ de\ \ e}{Divisores\ \ de\ \ a}$$

Tendríamos que ir realizando los cocientes de todas las combinaciones de cada uno de los divisores del término independiente entre cada divisor del coeficiente principal.

Para calcular cuales de estas posibles raíces corresponden a las raíces del polinomio, aplicamos el teorema del resto, es decir, serán raíces aquellas que hagan que el valor del polinomio sea cero.

Una vez obtenidas las raíces, el polinomio lo podemos expresar como:

$$P(x)=a.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3).(x-x_4)$$

Donde a es el coeficiente principal y los diferentes x1, x2, x3… son las raíces del polinomio. Te recuerdo que el número de raíces de un polinomio coincide con el grado de ese polinomio.

## Ejercicio resuelto del teorema de Gauss para descomponer polinomios

Vamos a ver todo esto con un ejemplo para que lo asimiles mejor: aplicar el teorema de Gauss para descomponer el siguiente polinomio:

$$P(x)=3x^4+6x^3-39x^2-42x+72$$

En primer lugar, vamos a simplificar todos los términos del polinomio, dividiéndolos entre 3, para simplificar todo el procedimiento:

$$P(x)=x^4+2x^3-13x^2-14x+24$$

Lo hacemos así porque al tener como coeficiente principal un 1, las posibles raíces coincidirán con los divisores del término independiente y no tendremos que estar combinando ambos divisores para encontrar las raíces. De esta forma, el número posibles raíces se reduce considerablemente.

Los divisores primo del término independiente, que en este caso es 24 son:

$$1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3$$

Pero no hay que olvidar, que también tenemos divisores compuestos, como son:

$$4,\ -4,\ 6,\ -6,\ 8,\ -8,\ 12,\ -12$$

Para comprobar, cuales de estas posibles raíces corresponden a las raíces del polinomio, no nos queda más remedio que ir aplicando el teorema del resto, comprobando cuáles de ellas hace que el valor del polinomio sea 0.

Como el polinomio es de grado 4, debemos encontrar 4 raíces de entre todas las posibles.

Empezamos por los divisores más pequeños, ya que las operaciones son más simples. Empezamos comprobando el valor del polinomio con el 1:

$$P(1)=1^4+2.1^3-13.1^2-14.1+24=0$$

El valor del polinomio es igual a 0, por lo que 1 es raíz del polinomio:

$$x=1 \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Seguimos con -1:

$$P(-1)=(-1)^4+3.(-1)^3-13.(-1)^2-14.(-1)+24=24$$

El valor del polinomio es distinto de cero, por lo que -1 no es una raíz del polinomio:

$$x=-1 \ \ no \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Seguimos con 2:

$$P(2)=2^4+2.2^3-13.2^2-14.2+24=-24$$

El valor del polinomio es igual a -24, distinto de cero, por lo que 2 no es una raíz del polinomio:

$$x=2 \ \ no \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Seguimos con -2:

$$P(-2)=(-2)^4+3.(-2)^3-13.(-2)^2-14.(-2)+24=0$$

El valor del polinomio con x=-2 es igual a 0, por lo que -2 es la segunda raíz del polinomio.

$$x=-2 \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Nos quedan otras dos raices.

Probamos con el 3:

$$P(3)=3^4+2.3^3-13.3^2-14.3+24=0$$

El valor del polinomio es 0, por tanto x=3 es otra raíz del polinomio:

$$x=3 \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Ya hemos encontrado tres raíces. Sólo nos queda una más.

Seguimos probando con x=-3:

$$P(-3)=(-3)^4+3.(-3)^3-13.(-3)^2-14.(-3)+24=-24$$

El valor del polinomio con x=-3 no es igual 0, por lo que -3 tampoco es raíz del polinomio:

$$x=-3 \ \ no \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Seguimos con 4:

$$P(4)=4^4+2.4^3-13.4^2-14.4+24=144$$

El valor del polinomio no es 0 con x=4, por tanto, 4 no es raíz del polinomio:

$$x=4 \ \ no \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Probamos con x=-4:

$$P(-4)=(-4)^4+3.(-4)^3-13.(-4)^2-14.(-4)+24=0$$

El valor del polinomio xon x=-4 es 0. Por tanto x=-4 es otra raíz del polinomio:

$$x=-4 \ \ es \ \ raíz \ \ de \ \ P(x)$$

Y con esta raíz ya llevamos las cuatro raíces que estábamos buscando, que son éstas:

$$x_1=1 \quad x_2=-2 \quad x_3=3 \quad x_4=-4$$

Según el método de Gauss para factorizar polinomios el polinomio descompuesto tiene esta forma:

$$P(x)=a.(x-x_1).(x-x_2).(x-x_3).(x-x_4)$$

Por lo que tenemos que sustituir el valor de a y de las raíces por sus valores:

$$P(x)=1.(x-1).(x-(-2)).(x-3).(x-(-4))$$

Finalmente operamos y nos queda:

$$P(x)=(x-1).(x+2).(x-3).(x+4)$$

# La regla de Ruffini

Es un **método** (algoritmo) que nos permite obtener las raíces de un polinomio. Es de gran utilidad ya que para grado mayor que 2 no disponemos de fórmulas, al menos fáciles, para poder obtenerlas.

Cada vez que hacemos una tabla a partir de los coeficientes del polinomio, obtenemos una raíz y los coeficientes de un polinomio de un grado menor (un polinomio que divide al propio polinomio). De este modo, podemos ir reduciendo el grado del polinomio hasta llegar a uno de segundo grado cuyas raíces sabemos calcular rápidamente.

En realidad, el método consiste escoger una posible raíz y desarrollar una tabla. Si el último resultado de la tabla es 0, el procedimiento habrá finalizado correctamente. Si no es así, tendremos que probar con otra posible raíz.

Sabemos que

> toda raíz ha de ser un divisor del término independiente (el término del polinomio que no tiene parte literal, es decir, que no tiene $x$)

y, por tanto, los divisores de éste son los candidatos.

En esta sección vamos a explicar el método a través de 4 ejemplos. Calcularemos las raíces de polinomios de tercer y quinto grado de forma minuciosa y factorizaremos los polinomios.

**Nota:** los polinomios no están igualados a cero (no son ecuaciones), pero los trataremos como si lo fueran.

## Ejemplo

$$x^3 - 3x - 2$$

El polinomio es de grado 3.

Escribimos en la primera fila los coeficientes de cada monomio en orden decreciente de grado. Si hay algún coeficiente que sea 0 (en nuestro caso es el coeficiente de $x^2$), también hay que escribirlo.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & x^3 & 0x^2 & -3x & -2 \\
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\
\hline
 & & & &
\end{array}$$

Ahora buscamos un número que sea divisor del término independiente, es decir, del término que no tiene parte literal (ninguna $x$), y lo escribimos en la columna de la izquierda.

En nuestro polinomio el independiente es -2. Podemos escoger 1, -1, 2 ó -2. Escogemos, por ejemplo, 2, que es divisor de -2 y tiene el signo contrario. Si no funciona, tendremos que probar con otro hasta dar con el bueno.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\
\hline
\mathbf{2} & & & &
\end{array}$$

El primer coeficiente pasa a la parte inferior de la línea, sin realizar ninguna operación.

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\
\hline
\mathbf{2} & \mathbf{1} & & &
\end{array}$$

Ahora multiplicamos el coeficiente que hemos bajado por el número de la columna izquierda y el resultado lo escribimos debajo del siguiente coeficiente, pero arriba de la línea.

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\
 & & 2 & & \\
\hline
2 & 1 & & &
\end{array}$$

Sumamos el número que hemos escrito con el coeficiente que tiene arriba y el resultado lo escribimos debajo de la línea:

$$0 + 2 = 2$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \mathbf{1} & \boxed{\begin{matrix}\mathbf{0}\\ \mathbf{2}\end{matrix}} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\
\hline
\mathbf{2} & \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{2}} & &
\end{array}$$

Ahora repetimos el proceso:

Multiplicamos el número obtenido por el de la columna izquierda y lo situamos debajo del siguiente coeficiente:

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$\begin{array}{c|cccc}
 & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\
 & & \mathbf{2} & 4 & \\
\hline
2 & \mathbf{1} & 2 & &
\end{array}$$

Sumamos el número que hemos escrito con el coeficiente que tiene arriba y el resultado lo escribimos debajo de la línea:

$$-3+4=1$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ & & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boxed{\mathbf{1}} & \end{array}$$

Multiplicamos el número obtenido por el de la columna izquierda y lo situamos debajo del siguiente coeficiente:

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ & & \mathbf{2} & \mathbf{4} & 2 \\ \hline 2 & \mathbf{1} & \mathbf{2} & 1 & \end{array}$$

Sumamos el número que hemos escrito con el coeficiente que tiene arriba y el resultado lo escribimos debajo de la línea:

$$-2+2=0$$

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ & & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \boxed{\mathbf{0}} \end{array}$$

Es importante que el último número del proceso sea 0. Si no es así, significa que el número de la columna izquierda no nos sirve y debemos escoger otro.

La raíz que del polinomio que hemos calculado está en la columna izquierda.

Tenemos la raíz $x = 2$.

Los números de debajo de la línea son los coeficientes de un polinomio de un grado menos (en nuestro caso, de grado 2).

$$\begin{array}{c|cccc} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{-3} & \mathbf{-2} \\ & & \mathbf{2} & \mathbf{4} & \mathbf{2} \\ \hline \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ & \Downarrow & \Downarrow & \Downarrow & \\ & \boldsymbol{x^2} & \boldsymbol{2x} & \mathbf{1} & \end{array}$$

El polinomio de un grado menor es

$$x^2+2x+1$$

Por tanto, la primera factorización es

$$x^3-3x-2 =$$

$$= (x^2+2x+1)(x-2)$$

Y la raíz $x = 2$.

Si queremos calcular las otras raíces, aplicamos de nuevo el método al polinomio de un grado menos. En nuestro caso, como es de grado 2, usamos la fórmula para las ecuaciones cuadráticas:

$$x^2+2x+1=0 \ \rightarrow$$

$$x = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2-4\cdot1\cdot1}}{2\cdot1} = -1$$

$\Rightarrow$

$$x^3-3x-2 =$$

$$=(x^2+2x+1)(x-2)=$$

$$=(x+1)^2(x-2)$$