

ESCUELA AGROINDUSTRIAL 25 DE MAYO

Espacio Curricular: *Matemática*

Profesor: Andrea Segura

Curso: *6to Año 2da. División.* CICLO ORIENTADO

Turno: TARDE

Fecha: 13 Septiembre 2020

Tema: *Limite indeterminados* – guía 10

-Correo Electrónico: sandreaseg@gmail.com

DOCUMENTO DE LECTURA

Una **indeterminación** matemática es una expresión algebraica que aparece en el cálculo de los límites y cuyo resultado no se puede predecir.

Cuando aparece una indeterminación en un límite, el límite **depende de la propia función**. Esto conlleva que, aunque aparezca la misma indeterminación, el límite puede ser distinto para funciones distintas.

Las indeterminaciones son las 7 siguientes expresiones:

$$\infty - \infty; 0 \cdot \infty; \frac{0}{0}; \frac{\infty}{\infty}; \infty^0; 0^0 \text{ ó } 1^\infty$$

INDET.	ALTERNATIVA DE METODOS PROPUESTOS
k/0	Cuando el resultado da $\frac{k}{0}$ para $k \neq 0$ Se resuelve por medio de LIMITES LATERALES Ya sabemos que no es posible dividir un número (K) por cero, si lo probamos en la calculadora nos dará error. Sin embargo, recuerda que cuando hablamos de límites el cero no es un valor 'estático', sino un valor al que nos aproximamos. Un número k dividido entre otro muy próximo a cero da un número muy grande, que será positivo o negativo según la relación que haya entre los signos de k y del 0. El límite puede ser $+\infty$, $-\infty$ o no tener límite.

Ejemplo	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-1}{x+1} = \frac{-2}{0}$ Tomamos los límites laterales para determinar el signo de ∞. Si le damos a la x un valor que se acerque a -1 por la izquierda como -1.1; tanto el numerador como denominador son negativos, por tanto el límite por la izquierda será: $+\infty$ Si le damos a la x un valor que se acerque a -1 por la derecha como -0.9. El numerador será negativo y el denominador positivo, por tanto el límite por la derecha será: $-\infty$. Como no coinciden los límites laterales, la función no tiene límite cuando $x \rightarrow -1$
Ejemplo	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}$ Como resultado da una indeterminación. Tomamos los límites laterales para determinar el signo de ∞. $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} = \frac{(+)}{(+)} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} = \frac{(+)}{(+)} = \infty$ Como coinciden los límites laterales la función tiene límite ∞ cuando $x \rightarrow 0$
0/0	CASO I Este caso aplica cuando tenemos una fracción donde el numerador y el denominador son polinomios. 1 Al intentar calcular el límite, se identifica la indeterminación del tipo cero sobre cero. 2 Se descomponen en factores los polinomios de el numerador y denominador. 3 Se simplifica la fracción. 4 Se calcula el límite de la expresión simplificada Ejemplo $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1}$ Se calcula el límite y nos da una indeterminada 0/0 $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} = \frac{(-1)^2 + 2 \cdot (-1) + 1}{(-1)^2 - 1}$

Ejemplo	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 1} - \frac{1}{x}$	El numerador es un trinomio cuadrado perfecto que lo podemos escribirlo como un binomio al cuadrado.
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x - 1}$	Simplificamos numerador y denominador
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x - 1} = \frac{-1 + 1}{-1 - 1}$	Calculamos el nuevo límite.
	Algunas veces vamos a tener que resolver más de un caso, hasta llegar a un resultado que nos permita salvar la indeterminada o hasta agotar todas las instancias para saber que no tiene límite en ese punto.	
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$	
	Al resolver el limite nos da una indeterminada 0/0	
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \frac{(-1)^2 - 1}{(-1)^2 + 2(-1) + 1}$	
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)^2}$	El numerador es una diferencia de cuadrado y el denominador es un trinomio cuadrado perfecto.
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x + 1)^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x + 1}$	Simplificamos
	$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x - 1}{x + 1} = \frac{-1}{-1 + 1}$	Calculamos el límite y nos da otra indeterminada
	Como obtuvimos cero solamente en el denominador, debemos identificar si este límite va a infinito positivo, negativo o no tiene límite (por un lado se va a infinito positivo y por el otro, negativo). Para esto tomamos límites laterales.	
	$\frac{-1.1 - 1}{-1.1 + 1} = \frac{-2.1}{-0.1}$	$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x - 1}{x + 1} = \infty$ limite por izquierda
	$\frac{-0.9 - 1}{-0.9 + 1} = \frac{-1.9}{0.1}$	$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x - 1}{x + 1} = -\infty$ limite por derecha

	Como el límite por la izquierda y derecha no son iguales se concluye que no existe el límite en $x = -1$		
	CASO I I Función con radicales		
	Este caso aplica cuando tenemos una fracción que tiene un radical, generalmente en el denominador.		
	A continuación se explica el procedimiento para obtener el límite cuando tienes una indeterminación del tipo cero entre cero.		
	1 Al intentar calcular el límite, se identifica la indeterminación del tipo cero sobre cero		
	2 Multiplicamos numerador y denominador por el conjugado de la expresión irracional.		
		Expresión	Conjugado
Expresión	Co	$3 + \sqrt{7}$	$3 - \sqrt{7}$
$a + \sqrt{b}$	a		
$a - \sqrt{b}$	a	$2x - 5\sqrt{x^2 - 1}$	$2x + 5\sqrt{x^2 - 1}$ ejemplo
	3 Se realizan las operaciones y se simplifica la fracción		
	Toma en cuenta que una expresión irracional multiplicada por su conjugado, da como resultado una diferencia de cuadrados.		
	$(a + \sqrt{b})(a - \sqrt{b}) = a^2 - b$	$(3 + \sqrt{5})(3 - \sqrt{5}) = 9 - 5$	ejemplo
	4 Se calcula el límite de la expresión simplificada		
Ejemplo	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 - \sqrt{1 - x}}$		
	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1 - x})}{(1 - \sqrt{1 - x})(1 + \sqrt{1 - x})}$	Multiplicamos y dividimos por el conjugado del denominador	
	Realizamos las operaciones y simplificamos		
	En el denominador tenemos una suma por diferencia (binomios conjugados) que será igual a diferencia de cuadrados		

	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{1 - (1-x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1 + \sqrt{1-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x}$ Calculamos el límite $\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \sqrt{1-x} =$ El límite es 2
--	---

ACTIVIDADES PROPUESTAS

1- Resuelva los siguientes límites (del caso k/0) y salve la indeterminada cuando sea posible. realice el desarrollo completo de cada ejercicio propuesto.

a- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+2}{x-2} =$
b- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$
c- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x^2} =$
d- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+4}{x^2} =$

2- Salve la indeterminada, cuando sea posible, en los casos 0/0

a- $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-9}{x-3} =$
b- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1} =$
c- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{1 - \sqrt{1-x}} =$

d- $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{x+1}} =$

Director Roberto Enrique